古谷数学教室第 2 回

数と式 2

2025 年 3 月 19 日

1　基礎事項

1.1　集合

数学では、「1 から 10 までの自然数の集まり」のように、範囲がはっきりしたもの[1] の集まりを**集合**といい、集合に入っている一つ一つのものを、その集合の**要素**という。

たとえば、「1 から 10 までの自然数の集まり」を表す集合 A は、次のように表現される：

$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\},$$
$$A = \{x \mid 1 \leq x \leq 10 \text{を満たす自然数}\ x\}.$$

x が集合 A の要素であるとき、x は集合 A に**属する**といい、

$$x \in A$$

で表し、y が集合 A の要素でないとき、

$$y \notin A$$

で表す。

2 つの集合 A、B について、A のすべての要素が B の要素でもあるとき、A を B の**部分集合**という。このとき、A は B に**含まれる**、または B は A を**含む**といい、

$$A \subset B$$

または

$$A \supset B$$

で表す。集合 A 自身も A の部分集合である。すなわち、

$$A \subset A$$

1)　ここでは、「はっきり」や「もの」については深くは考えない。「なんとなく言いたいことは分かった」で問題はない。

である。

　また、A と B の要素がすべて一致しているとき、A と B は**等しい**といい、

$$A = B$$

で表す[2]。

　要素が一つもない集合を考える。これを**空集合**といい、$\varnothing$ で表す。空集合 $\varnothing$ は、どんな集合に対しても、その部分集合であると約束する。

　集合 A、B のどちらにも属する要素全体の集合を A と B の**共通部分**といい、

$$A \cap B$$

で表す。また、A、B の少なくとも一方に属する要素全体の集合を A と B の**和集合**といい、

$$A \cup B$$

で表す。

　集合を考えるときは、一つの集合 U を決めて、その部分集合について考えることが多い。このとき、U を**全体集合**という。U の部分集合 A に対して、U の要素で、A には属さない要素全体の集合を、U に関する A の**補集合**といい、$\bar{A}$ で表す。

　補集合の定義から、次のことが成り立つ：

補集合の性質

U を全体集合とし、A、B をその部分集合とするとき、

$$A \cap \bar{A} = \varnothing,$$
$$A \cup \bar{A} = U,$$
$$\bar{\bar{A}} = A,$$
$$A \subset B \text{ ならば } \bar{A} \supset \bar{B},$$

ただし、$\bar{\bar{A}}$ は $\bar{A}$ の補集合を意味する。また、「ならば」については 1.2 小節で詳しく学習する。

　$A \cap B$、$A \cup B$ の補集合について、次の**ド・モルガンの法則**が成り立つ：

ド・モルガンの法則

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B},$$
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

2）「$A \subset B$ かつ $B \subset A$」$\Longleftrightarrow$ A = B

1.2　命題と条件

一般に、正しいか正しくないかが定まる文や式を**命題**という。また、その命題が正しいとき、その命題は**真**であるといい、正しくないとき、その命題は**偽**であるという。

たとえば、

「自然数 4 は偶数である」

は真であり、

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$$

は偽である。

命題の中には、

「どんな実数 x についても $x^2 \geq 0$ である」

のように、文字を含むものもあり、これは真の命題である。一方、文字 x を含む文や式でも、「x は素数である」、「$x \geq 2$」などは、x に値を代入しないと真の命題か偽の命題かが定まらないから、命題ではない。しかし、たとえば x を自然数全体の集合の要素と指定し、x に 1、2、3 などを代入すると、代入した文や式はそれぞれが真偽の定まる命題になる。このような文字 x を含む文や式を、x に関する**条件**という。

条件を考える場合には、条件に含まれる文字がどんな集合の要素かをはっきりさせておく。この集合を、その条件の**全体集合**という。

以下では、一つ一つの条件を単に p、q などの文字で表すことにする。

実数について述べた命題「3 より大きければ、1 より大きい」は、実数 x に関する 2 つの条件

$$p : x > 3,$$
$$q : x > 1$$

を用いて、

p ならば q

と表現することができる。このような命題を、

$$p \Longrightarrow q$$

と書く。

命題 $p \Longrightarrow q$ について、p を**仮定**、q を**結論**という。

実数全体の集合 R の要素のうち、$x > 3$ を満たす x の値全体の集合を P、$x > 1$ を満たす x の値全体の集合を Q とすると、$P \subset Q$ が成り立つ。

一般に、全体集合を U とし、U の要素のうち、条件 p を満たすもの全体の集合を P、条件 q を満たすもの全体の集合を Q とすると、命題 $p \Longrightarrow q$ は「P の要素はすべての Q の要素である」ということを表している。

すなわち、$p \Longrightarrow q$ が真ならば、$P \subset Q$ が成り立つ。逆に、$P \subset Q$ が成り立てば、$p \Longrightarrow q$ は真である。

以上から、次のことがいえる：

命題 p ならば q

条件 p を満たすもの全体の集合を P、条件 q を満たすもの全体の集合を Q とすると、

1. 命題 $p \Longrightarrow q$ は、「p を満たすものはすべて q を満たす」ということを表す。

2. 「命題 $p \Longrightarrow q$ が真である」と「$P \subset Q$ が成り立つ」とは同じこと[1] である。

1) 進んだ学生さんは、「同値である」、または「必要十分条件である」と訳すとよい。

命題 $p \Longrightarrow q$ が偽であるのは、

$$p \text{ を満たすが、} q \text{ を満たさないもの} \tag{1}$$

が存在するときである。

したがって、命題 $p \Longrightarrow q$ が偽であることを示すには、(1) の例を 1 つだけあげればよい。

そのような例を**反例**という。

2 つの条件 p、q を考える。命題 $p \Longrightarrow q$ が真であるとき、q は p であるための**必要条件**である、p は q であるための**十分条件**であるという。

2 つの条件 p、q について、「$p \Longrightarrow q$ かつ $q \Longrightarrow p$」を $p \Longleftrightarrow q$ と書く。命題 $p \Longrightarrow q$ と $q \Longrightarrow p$ がともに真であるとき、すなわち、$p \Longleftrightarrow q$ が成り立つとき、p と q は**同値**であるという。

また、このとき、q は p であるための**必要十分条件**であるという。

同様に、p は q であるための必要十分条件である。

条件 p に対して、「p でない」も条件である。これを p の**否定**といい、$\bar{p}$ で表す。条件 $\bar{p}$ の否定はもとの条件 p である。

全体集合を U とし、U の要素の中で、条件 p を満たすもの全体の集合を P で、条件 q を満たすものの全体の集合を Q で表す。このとき、次のことが成り立つ[3]：

「かつ」の否定、「または」の否定

$$\overline{p \text{ かつ } q} \Longleftrightarrow \bar{p} \text{ または } \bar{q},$$
$$\overline{p \text{ または } q} \Longleftrightarrow \bar{p} \text{ かつ } \bar{q}.$$

3) 「集合」と「条件」の区別はしっかりとしないといけない。ここで表す「かつ」は $\cap$ を意味しないし、「または」は $\cup$ を意味しない。条件「p かつ q」、条件「p または q」はそれぞれ $p \wedge q$、$p \vee q$ で表される。

1.3　命題とその逆・対偶・裏

命題 $p \Longrightarrow q$ に対して、

$$q \Longrightarrow p$$

を $p \Longrightarrow q$ の**逆**、

$$\bar{q} \Longrightarrow \bar{p}$$

を $p \Longrightarrow q$ の**対偶**、

$$\bar{p} \Longrightarrow \bar{q}$$

を $p \Longrightarrow q$ の**裏**という。

一般に、命題とその逆の真偽については、次のことがいえる：

もとの命題が真であっても、その逆が真であるとは限らない。

全体集合 U の集合の中で、条件 p を満たすもの全体の集合を P で、条件 q を満たすもの全体の集合を Q で表す。一般に、$p \Longrightarrow q$ は $P \subset Q$、$\bar{q} \Longrightarrow \bar{p}$ は $\bar{Q} \subset \bar{P}$ と同じである。

また、集合 P、Q については、

$$P \subset Q \Longleftrightarrow \bar{Q} \subset \bar{P}$$

が成り立つ。

このことから、次のことがいえる：

命題とその対偶の真偽

命題とその対偶の真偽は一致する。

1.4　命題と証明

命題 $p \Longrightarrow q$ が真であることを証明したいとき、p を仮定して q を導くのが困難なこともある。ここでは、このような場合に有効な証明方法を学ぶ。

命題とその対偶の真偽は一致するから、次のことがいえる：

対偶を利用する証明

命題 $p \Longrightarrow q$ を証明する[1] のに、その対偶 $\bar{q} \Longrightarrow \bar{p}$ を証明してもよい。

1)　「命題が真であることを証明する」ことを、単に「命題を証明する」と表現した。一般的に、単に「命題 A」とは、「真の命題 A」を意味するのだが、受験数学では、「次の命題が真であるかどうか証明せよ。」というような問いを問うことがあるため、わざわざ「命題が真であることを証明する」ということが多い。つまり、ある命題 A が「真の命題」か「偽の命題」か明示されていないときは、基本的には命題 A は真であると考えてよい。

また、命題が成り立たないと仮定して矛盾を導くことにより、もとの命題が真であると結論する方法を**背理法**という。具体的には、次のような手順で命題を証明する：

背理法を利用する証明

1. 命題が成り立たないと仮定する。

2. **1.** の仮定のもとで矛盾を導く。

3. **2.** で矛盾が生じたのは、**1.** の仮定が間違っているからである。

4. したがって、もとの命題が成り立つ。

2　例題

1. 集合 A を

$$A = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$$

であるとする。このとき、次の □ に適する記号 $\in$ または $\notin$ を入れよ。

(1) $2\square A$

(2) $1\square A$

2. 集合 $\{a,\ b\}$ の部分集合をすべてあげよ。

3. 2 つの集合 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$、$B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$ について、次の集合を求めよ。

(1) $A \cap B$

(2) $A \cup B$

4. $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ を全体集合とする。U の部分集合 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$、$B = \{3,\ 6\}$ について、次の集合を求めよ。

(1) $\bar{A}$

(2) $\overline{A \cup B}$

5. 次の命題の真偽を述べよ。

(1) 数 -1 について、$(-1)^2 \geq 0$ である。

(2) 数 -3 について、$\sqrt{(-3)^2} = -3$ である。

(3) 正三角形は二等辺三角形である。

6. a、b は実数とする。次の命題が偽であることを示せ：

$$a^2 = b^2 \Longrightarrow a = b.$$

7. a は実数とする。次の $\boxed{}$ に「必要」、「十分」のうち、適する言葉を入れよ。

$a^2 = 9$ は $a = 3$ であるための $\boxed{}$ 条件である。

8. x を実数とする。次の条件の否定を述べよ。

(1) x は有理数である。

(2) $x > 0$

9. a、b は実数、c、d は整数とする。次の条件の否定を述べよ。

(1) $a = 0$ かつ $b = 0$

(2) c、d の少なくとも一方は奇数である。

10. a、b は実数とする。次の命題の逆を述べよ。

(1) $a^2 = 0 \Longrightarrow a = 0$

(2) $a = b \Longrightarrow a^2 = b^2$

11. n は自然数とする。次の命題の対偶を述べよ。

(1) n は 4 の倍数ならば n は 2 の倍数

(2) $2n$ は偶数ならば n は偶数

12. $\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて、次の命題を証明せよ。

$1 + \sqrt{2}$ は無理数である。

3 演習問題

1. 次の集合を、要素を書き並べて表せ[4]。

(1) $\{n^2 \mid -1 < n \leq 2,\ n$ は整数$\}$

(2) $\{x \mid x$ は 24 の正の約数$\}$

2. 次の集合 $A = \{3n-1 \mid n = 1,\ 2\}$、$B = \{x \mid (x-2)(x-5) = 0,\ x$ は整数$\}$ の間に成り立つ関係を、記号 $\subset$、$=$、$\supset$ を用いて表せ。

3. $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ とする。集合 $P = \{3,\ 5,\ 9\}$、$Q = \{5,\ 6,\ 7\}$、$R = \{2,\ 4,\ 8\}$、$S = \varnothing$ のうち、集合 A の部分集合であるものはどれか。

4. 集合 $\{p,\ q,\ r,\ s\}$ の部分集合をすべて求めよ。

5. $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ を全体集合とする。U の部分集合 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7\}$、$B = \{2,\ 3,\ 8,\ 10\}$ について、次の集合を求めよ。

(1) $A \cap B$

(2) $A \cup B$

(3) $\bar{A}$

(4) $\bar{B}$

(5) $A \cap \bar{B}$

(6) $A \cup \bar{B}$

(7) $\bar{A} \cup \bar{B}$

(8) $\overline{A \cap B}$

---

4) 2 つの整数 a、b について、ある整数 k を用いて $a = bk$ と表されるとき、b は a の約数であるという。

6. 次の中から命題を選べ。また、命題についてはその真偽を調べよ。

(1) 1.41 は $\sqrt{2}$ に近い値である。

(2) 1.41 は $\sqrt{2}$ より大きい値である。

(3) 4^2 は 2^4 と等しい値である。

(4) -10^{24} は小さい数である。

7. x は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。

(1) $1 < x < 2 \Longrightarrow 1 < x < 3$

(2) $|x| \leq 2 \Longrightarrow |x-1| < 3$

8. n は自然数とする。命題

「n は偶数」$\Longrightarrow$「n は 4 の倍数」

の真偽を調べよ。偽のときは反例を答えよ。

9. 次の条件を満たす実数 x 全体の集合を求めよ。

(1) $-6 < x < 5$ かつ $2 \leq x \leq 10$

(2) $-8 < x < 1$ または $-4 \leq x \leq 7$

10. a は実数とする。次の条件の否定を述べよ。

(1) $a \geq 5$

(2) $-2 \leq a < 1$

11. x、y は実数とする。次の条件の否定を述べよ。

(1) $x = 3$ かつ $y = 5$

(2) $x > 4$ または $y \geq 4$

12. x、y、z は実数とする。次の $\boxed{\text{ア}}$ 、 $\boxed{\text{イ}}$ 、 $\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまるものを、下の⓪から③のうちから一つ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよいものとする。

(1) 「$x = 5$ かつ $y = 7$」は $x + y = 12$ であるための $\boxed{\text{ア}}$ 。

(2) $x > 0$ は $x > 1$ であるための $\boxed{\text{イ}}$ 。

(3) $x = y$ は $x + z = y + z$ であるための $\boxed{\text{ウ}}$ 。

⓪ 必要十分条件である

① 必要条件であるが、十分条件ではない

② 十分条件であるが、必要条件ではない

③ 必要条件でも十分条件でもない

13. m、x、y は実数とする。次の p は q であるための必要条件か、十分条件か、必要十分条件か、あるいはいずれでもないか。最も適するものを答えよ。

(1) $p : 2x - y = 3$ かつ $x + y = 3$、$q : x = 2$ かつ $y = 1$

(2) $p : mx = my$、$q : x = y$

(3) $p : \triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{PQR}$、$q : \triangle\mathrm{ABC} \sim \triangle\mathrm{PQR}$、ただし、$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{PQR}$ とは[5] 、三角形 ABC と三角形 PQR が合同であるという意味[6] である。また、$\triangle\mathrm{ABC} \sim \triangle\mathrm{PQR}$ とは、三角形 ABC と三角形 PQR が相似であるという意味[7] である。

14. a、b は実数とする。次の条件のうち、互いに同値である組み合わせをすべて選べ[8] 。

---

5) △ABC は、3 点 A、B、C を頂点とする三角形を意味している。
6) 2 つの三角形が合同とは、ここでは簡単に「2 つはピッタリ重なる」と思えばよい。
7) 2 つの三角形が相似とは、ここでは簡単に「ピッタリ重なるか、拡大縮小の関係にあるかのいずれか」と思えばよい。

8) (1) と (2) が同値である。のような答え方で、考えられるすべての組み合わせのうち、正しい組み合わせをすべて答えよという意味である。

(1) $ab = 0$

(2) $ab < 0$

(3) $a = 0$ かつ $b = 0$

(4) $a = 0$ または $b = 0$

(5) $a > 0$ かつ $b > 0$

(6) $a < 0$ かつ $b < 0$

(7) $a + b > 0$ かつ $ab > 0$

(8) $a + b < 0$ かつ $ab > 0$

15. x は実数とする。次の命題の逆、対偶を述べ、それらの真偽を調べよ。

(1) $x = 2 \Longrightarrow (x-2)(x-3) = 0$

(2) $(x-2)(x-3) \neq 0 \Longrightarrow x \neq 2$

(3) $(x-2)(x-3) = 0 \Longrightarrow$「$x = 2$ または $x = 3$」

16. x、y は実数とする。次の命題を証明せよ。

(1) $x + y > 5 \Longrightarrow$「$x > 3$ または $y > 2$」

(2) $y^2 \neq y \Longrightarrow y \neq 1$

17. $\sqrt{3}$ が無理数であることを用いて、次の数が無理数であることを証明せよ。

(1) $1 + \sqrt{3}$

(2) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$