古谷数学教室第 4 回

2 次関数、複素数と方程式

2025 年 4 月 2 日

1　基礎事項

1.1　関数とグラフ

2 つの変数 x、y について、x の値が 1 つ決まると、それにともなって y の値がただ 1 つ決まるとき、y は x の**関数**であるという。また、その変数 x の取りうる値をの範囲を、その関数の**定義域**という。

関数の定義域を示すのに、関数の式の後にかっこをつけて示すことがある。たとえば、次のように表す[1]：

$$y = x^2 + 2x \quad (5 \leq x \leq 10).$$

y が x の 1 次式で表されるとき、y は x の **1 次関数**であるといい、y が x の 2 次式で表されるとき、y は x の **2 次関数**であるという[2]。y が x の関数であるとき、y を表す x の式を $f(x)$ などのように書くことがある[3]。$y = f(x)$ は、$f(x)$ が x の 1 次式のとき x の 1 次関数であり、$f(x)$ が x の 2 次式のとき x の 2 次関数である。

x の関数 $y = f(x)$ を単に関数 $f(x)$ ともいう。定義域における数 a について、$x = a$ のときの関数 $f(x)$ の値を $f(a)$ で表す。

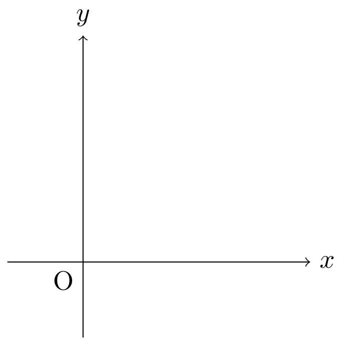
平面上に、下図のような点 O で垂直に交わる 2 本の数直線をとり、それらを x 軸、y 軸とする。

1）　定義域が実数全体であるとき、定義域を示すことを省略することがある。

2）　$y = 2x + 3$ などは、1 次関数で、$y = 3x^2 + 2x$ などは、2 次関数である。

3）　表し方は、$g(x)$ でも、$h(x)$ などでもよい。関数は英語で function というので、その頭文字をとって $f(x)$ と表すことが多いのだろう。

点 O を**原点**といい、x 軸と y 軸を**座標軸**という。



この平面上の点 P はの位置は、2 つの実数の組 $(a,\ b)$ で表される。この組 $(a,\ b)$ を点 P の**座標**といい、このような点 P を、$\mathrm{P}(a,\ b)$ と書く。また、座標が $(a,\ b)$ である点を、単に点 $(a,\ b)$ ということがある。

このようにして座標を定めた平面を**座標平面**という。

関数 $y=f(x)$ を座標平面上の図形として表したものがグラフである。1 次関数 $y=ax+b$ のグラフは、傾きが a で、切片が b の直線である。このグラフを直線 $y = ax+b$ ということもある。また、$y=ax+b$ をこの**直線の方程式**という。

一般に、関数 $y = f(x)$ のグラフとは、関係 $y = f(x)$ を満たすような点 $(x,\ f(x))$ 全体で作られる図形のことである。また、関数の定義 x の値に対応して y がとる値の範囲をこの関数の**値域**という。

関数の値域に最大の値があるとき、その値を関数の**最大値**という。また、最小の値があるとき、その値を関数の**最小値**という。

1.2　2 次関数のグラフ

2 次関数 $y=ax^2$ のグラフ[4] には、次のような特徴がある：

1. 原点を通り、y 軸に関して対称な曲線である。

2. $a>0$ のとき、上に開いている。

3. $a<0$ のとき、下に開いている。

2 次関数 $y = ax^2$ のグラフの形の曲線を**放物線**という。放物線は限りなくのびた曲線であり、また対称の軸をもつ。この軸を放物線の**軸**といい、放物線とその軸の交点を放物線の**頂点**という。

上に開いた形の放物線は**下に凸**であるといい、下に開いた形の放物線は**上に凸**であるという。

4）　2 次関数 $y=ax^2$ というときは、$a\neq 0$ である。

2 次関数 $y = ax^2$ の y の値の変化については、次のことがいえる：$a > 0$ のとき、$x = 0$ の前後で減少から増加に変わり、$a < 0$ のとき、$x = 0$ の前後で増加から減少に変わる。

2 次関数 $y = ax^2$ のグラフについてまとめると、次のようになる：

2 次関数のグラフ

グラフは放物線で、軸は y 軸、頂点は原点である。$a > 0$ のとき、下に凸、$a < 0$ のとき、上に凸。

平面上で、図形上の各点を一定の向きに一定の距離だけ動かすことを、**平行移動**という。2 次関数 $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフについて、一般に、次のことが言える：

2 次関数

2 次関数 $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフは、$y = ax^2$ のグラフを、点 $(p,\ q)$ が頂点となるように平行移動した放物線である。その軸は直線 $x = p$ である。

x の 2 次式を、上の等式のような形に変形することを、**平方完成**という。

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフを、放物線 $y = ax^2 + bx + c$ ともいう。また、$y = ax^2 + bx + c$ をこの放物線の方程式という。一般に、$y = ax^2 + bx + c$ のグラフは、$y = ax^2$ のグラフを平行移動した放物線である。

1.3　2 次方程式

$a \neq 0$ であるとする。このとき、

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

なので、$b^2 - 4ac \geq 0$ のとき、

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

が得られる。方程式における実数の解を、単に**実数解**という。2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ について、$b^2 - 4ac$ を**判別式**といい、$b^2 - 4ac = 0$ のときの解を**重解**という。

1.4　複素数とその計算

2 乗して -1 になる新しい数を 1 つ考え、これを文字 i で表す：

$$i^2 = -1.$$

そして、i と 2 つの実数 a、b を用いて $a+ib$ の形で表される数を考える。この数を**複素数**という。複素数 $a + ib$ では、a をその**実部**、b をその**虚部**、i を**虚数単位**という。

実数全体が複素数全体に含まれるように、$b = 0$ のときの複素数は、実数 a を表すものとする。$b \neq 0$ のときの複素数を**虚数**といい、とくに $a = 0$ である虚数 ib を**純虚数**という。

以下、複素数 $a + ib$ や $c + id$ などでは、文字 a、b、c、d は実数を表すものとする。2 つの複素数が等しいのは、実部、虚部が、それぞれ一致する場合とする。すなわち、次のように定める：

複素数の相等

$$a + ib = c + id \iff a = c \text{ かつ } b = d,$$

2 つの複素数 $a + ib$、$a - ib$ を、互いに**共役な複素数**という。

一般に、複素数の四則計算の結果は、次のようになる：

複素数の四則演算

$$\begin{aligned}
(a + ib) + (c + id) &= (a + c) + i(b + d), \\
(a + ib) - (c + id) &= (a - c) + i(b - d), \\
(a + ib)(c + id) &= (ac - bd) + i(ad + bc), \\
\frac{c + id}{a + ib} &= \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + i\frac{ad - bc}{a^2 + b^2}.
\end{aligned}$$

たとえば、-3 の平方根は $\sqrt{3}i$ と $-\sqrt{3}i$ である。そこで、$\sqrt{3}i$ を $\sqrt{-3}$ で表すことにすると、-3 の平方根は、$\sqrt{-3}$ と $-\sqrt{-3}$ である。

$a > 0$ とする。一般に、根号の中が負である記号 $\sqrt{-a}$ の意味を次のように定める：

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$$

1.5　2 次方程式の解

a、b、c を実数とする。2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ は、$b^2 - 4ac$ の符号に関係なく解をもつ。方程式の解のうち、実数であるものを実数解といい、虚数であるものを**虚数解**という。

1.6　解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 つの解を α、β とするとき、次のことが成り立つ：

解と係数の関係

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},$$
$$\alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

1.7　剰余の定理と因数定理

整式 $P(x)$ を x の 1 次式 $x-k$ で割った商が $Q(x)$、余りが R であることは、次の式で表される：

$$P(x)=(x-k)Q(x)+R.$$

ここで、次の**剰余の定理**が成り立つ：

剰余の定理

整式 $P(x)$ を 1 次式 $x-k$ で割った余りは、$P(k)$ に等しい。

剰余の定理より、次の**因数定理**が成り立つことが理解できる：

因数定理

$$「整式\ P(x)\ が\ 1\ 次式\ x-k\ を因数にもつ」\Longleftrightarrow P(k)=0.$$

1.8　高次方程式

x の整式 $P(x)$ が n 次式のとき、方程式 $P(x)=0$ を x の n 次方程式という。また、3 次以上の方程式を**高次方程式**という。

ある数を 3 乗して a になるとき、その数 a を **3 乗根**という。すなわち、$x^3=a$ となる数 x が a の 3 乗根である。

2　演習問題

1. 関数 $f(x) = -x^2 + x - 3$ について、$f(0)$、$f(-1)$、$f(2)$、$f(a+2)$ の値を求めよ。

2. 次のような長方形について、y が x の関数であるものは y を x の式で表せ。また、その関数の定義域を示せ。

(1) 縦の長さが 10m、横の長さが xm、面積が $y\mathrm{m}^2$

(2) 周の長さが 10m、縦の長さが xm、面積が $y\mathrm{m}^2$

(3) 面積が $10\mathrm{m}^2$、縦の長さが xm、横の長さが ym

(4) 縦の長さが xm、面積が $y\mathrm{m}^2$

3. 次の点は、第何象限[5] の点か答えよ。

(1) $(3,\ -2)$

(2) $(-4,\ -4)$

4. 関数 $y = 2x + 1 \quad (-2 \leq x < 3)$ のグラフをかけ。また、その値域を求めよ。

5. 次の関数に最大値、最小値があれば、それを求めよ。

(1) $y = -x + 4 \quad (-2 \leq x < 2)$

(2) $y = \dfrac{1}{2}x - 1 \quad (x \geq -2)$

6. 次の 2 次関数のグラフをかけ。また、その軸と頂点を求めよ。

(1) $y = 5x^2 - 3$

5)　座標平面は座標軸によって 4 つの部分に分けられる。これらの各部分を**象限**といい、点 $(a,\ b)$ に対して $a > 0$ かつ $b > 0$ の部分を**第 1 象限**、$a < 0$ かつ $b > 0$ の部分を**第 2 象限**、$a < 0$ かつ $b < 0$ の部分を**第 3 象限**、$a > 0$ かつ $b < 0$ の部分を**第 4 象限**という。

(2) $y=-(x+3)^2$

(3) $y=-(x+3)^2+1$

7. 次の 2 次式を平方完成せよ。

(1) $2x^2-8x+1$

(2) $\frac{1}{2}x^2-x+3$

(3) x^2+3x-2

(4) $-2x^2+6x-1$

8. 次の 2 次関数のグラフをかけ。また、その軸と頂点を求めよ。

(1) $y=2x^2+8x-1$

(2) $y=-\frac{1}{2}x^2-x$

(3) $y=(x+2)(2x-1)$

9. 次の各点を、x 軸方向に 2、y 軸方向に -3 だけ移動した点の座標を求めよ。また、この移動によって、次の点に移される点の座標を求めよ。

(1) $(3,\ 5)$

(2) $(-3,\ -4)$

10. 放物線 $y=3x^2$ について、次の問いに答えよ。

(1) 放物線 $y = 3x^2$ を x 軸方向に 2、y 軸方向に 3 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

(2) 次の放物線は、どのように平行移動すると $y=3x^2$ に重なるか。

i. $y=3(x+1)^2-2$

ii. $y=3x^2+x-1$

11. 点 $(4,\ -3)$ を、x 軸、y 軸、原点に関して、それぞれ対称移動して得られる点の座標を求めよ。

12. 次の 2 次関数に最大値、最小値があれば、それを求めよ。

(1) $y=x^2-2x+3$

(2) $y=-2x^2-4x+5$

13. 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1) $y=-x^2+4x-2 \quad (0\leq x\leq 4)$

(2) $y=-3x^2+6x-5 \quad (-1\leq x\leq 2)$

14. 次の関数に最大値、最小値があれば、それを求めよ。

(1) $y=-2x^2-4x+1 \quad (-2\leq x<1)$

(2) $y=x^2-2x+2 \quad (-1<x<2)$

15. 次の条件に適するように、定数 a の値を定めよ。

(1) 関数 $y=x^2-4x+a \quad (1\leq x\leq 5)$ の最大値が 6 である。

(2) 関数 $y=-x^2-4x+a$ の最大値が、関数 $y=x^2-4x$ の最小値と一致する。

16. 放物線 $y=-3x^2+ax+b$ が、2 点 $(1,\ 1)$、$(2,\ -8)$ を通る。定数 a、b の値を定めよ。

17. $x=2$ で最小値 -4 をとり、$x=0$ のとき、$y=4$ となるような x の 2 次関数を求めよ。

18. 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ x の 2 次関数を求めよ。

(1) 頂点が点 $(-1,\ 3)$ で、点 $(1,\ 7)$ を通る。

(2) 軸が直線 $x=-2$ で、2 点 $(0,\ 3)$、$(-1,\ 0)$ を通る。

19. 次の連立 3 元 1 次方程式[6] を解け：

$$\begin{cases} a-b+3c=1 \\ 3a+7b-c=8 \\ 2a-4b+5c=-2 \end{cases}.$$

20. 2 次関数が 3 点 $(-1,\ 1)$、$(1,\ -5)$、$(3,\ 5)$ を通るとき、その 2 次関数を求めよ。

21. 次の 2 次方程式を解け。

(1) $x^2-9=0$

(2) $5x^2-7x-6=0$

(3) $(x-2)^2-3=0$

(4) $x^2-5x+3=0$

(5) $-5x^2+4x+2=0$

(6) $2x^2+4\sqrt{5}x+10=0$

(7) $\sqrt{3}x^2-4x-2=0$

(8) $2(x+1)^2=(x+2)(x+3)$

(9) $2(x+2)^2-(x+2)-3=0$

(10) $0.2x^2-0.5x-1.2=0$

(11) $\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{5}{2}x+1=0$

6） 3 文字を含む 1 次方程式を組み合わせた連立方程式を**連立 3 元 1 次方程式**という。

22. 2 次方程式 $x^2-3(k+1)x+k^2-4=0$ の解の 1 つが -1 であるとき、定数 k の値と他の解を求めよ。

23. 次の 2 次方程式の実数解の個数を求めよ。

(1) $x^2-5x+1=0$

(2) $-x^2+3x-5=0$

(3) $9x^2-6x+1=0$

24. 2 次方程式 $x^2+6x+2a-1=0$ が異なる 2 つの実数解もつとき、定数 a の値の範囲を定めよ。

25. 2 次方程式 $4x^2+(k-1)x+1=0$ が重解をもつように、定数 k の値を定めよ。また、そのときの重解を求めよ。

26. それぞれの数の 2 乗の和が 77 となるような連続する 3 つの自然数を求めよ。

27. 次の関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ。

(1) $y=(x+1)(x-5)$

(2) $y=-2x^2+5x-1$

(3) $y=4x^2-20x+25$

28. 次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の個数を求めよ。

(1) $y=2x^2-4x+2$

(2) $y=-x^2-x+12$

(3) $y=-3x^2+2x-1$

29. 2 次関数 $y=2x^2+3x-2k+1$ のグラフが x 軸と共有点をもつとき、定数 k の値の範囲を定めよ。

30. 2 次関数 $y = x^2 + mx + m + 3$ のグラフが x 軸に接するように、定数 m の値を定めよ。また、そのときの接点の座標を求めよ。

31. 次の不等式を解け。

(1) $2x - 5 \leq 0$

(2) $(x+1)(x-2) > 0$

(3) $(2x+3)(3x-4) \leq 0$

(4) $x^2 - 4 < 0$

(5) $x^2 - 3x + 2 > 0$

(6) $2x^2 + 9x + 9 \geq 0$

(7) $3x^2 - \sqrt{7}x - 1 \geq 0$

(8) $x^2 + x \leq 3x + 24$

(9) $(x-4)^2 > 0$

(10) $(x-4)^2 \geq 0$

(11) $(x-4)^2 < 0$

(12) $(x-4)^2 \leq 0$

(13) $9x^2 + 1 \leq 6x$

(14) $x^2 - 2x + 5 \leq 0$

(15) $\begin{cases} x^2 - x - 6 < 0 \\ x^2 - x \geq 0 \end{cases}$

(16) $5x - 3 \leq 2x^2 < x + 6$

32. 周囲の長さが 20cm の長方形がある。この長方形の面積が 24cm^2 以上となるときの長くない方の辺の長さの範囲を求めよ。

33. 等式 $(x-2y)+i(x-y)=1+4i$ を満たす実数 x、y の値を求めよ。

34. 次の計算をせよ。

(1) $(4-9i)-(3-9i)$

(2) $(1+3i)(2+i)$

(3) $(3-2i)^2$

35. 次の複素数と共役な複素数を答えよ。

(1) $5+3i$

(2) $2i$

36. 式 $\dfrac{3+i}{3-i}$ を計算せよ。

37. 次の 2 次方程式を解け。

(1) $x^2+3x+10=0$

(2) $x^2-4x+8=0$

(3) $2(x-1)^2+2(x-1)+1=0$

(4) $\dfrac{x^2+1}{2}=\dfrac{x-1}{3}$

38. 2 次方程式 $x^2-3x-1=0$ の解の種類を判別せよ。

39. a は定数とする。2 次方程式 $2x^2-2ax-a^2+3=0$ の解の種類を判別せよ。

40. 2 次方程式 $4x^2+(m-1)x+1=0$ が重解をもつとき、定数 m の値とその値とその解を求めよ。

41. 2 次方程式 $x^2 - x + 7 = m(x+1)$ が虚数解をもつように、定数 m の値の範囲を定めよ。

42. 次の 2 次方程式について、2 つの解の和と積を求めよ。

(1) $x^2 + 3x + 2 = 0$

(2) $4x^2 + 3x - 9 = 0$

(3) $\dfrac{3}{2}x^2 + 2x + \dfrac{5}{6} = 0$

43. 2 次方程式 $2x^2 - 2x + 1 = 0$ の 2 つの解を α、β とするとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$

(2) $(\alpha - \beta)^2$

(3) $(1+\alpha)(1+\beta)$

44. 2 次方程式 $x^2 - 10x + m = 0$ の 2 つの解の比が $2:3$ であるとき、定数 m の値と 2 つの解を求めよ。

45. 2 次式 $x^2 + 2x + 5$ を、複素数の範囲で因数分解せよ。

46. 次の 2 数を解とする 2 次方程式を作れ。ただし、係数は整数とする。

(1) $\dfrac{3}{2}$、$-\dfrac{2}{3}$

(2) $2+3i$、$2-3i$

47. 和と積が次のようになる 2 数を求めよ。

(1) 和が 5、積が -14

(2) 和が 4、積が -1

48. 次の多項式を、[　] 内の 1 次式で割った余りを求めよ。

(1) $x^3 - x^2 - 7x - 6$ $[x+1]$

(2) $2x^3 - x^2 - 2x + 1$ $[2x-1]$

49. 多項式 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ が、$x - 1$ を因数にもつことを示し、因数分解せよ。

50. 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^3 - 2x^2 - x + 2$

(2) $2x^3 + 9x^2 + 13x + 6$

51. 多項式 $6x^3 + ax^2 - 3x - 9$ が、$2x + 3$ で割り切れるように、定数 a の値を定めよ。

52. 次の方程式を解け。

(1) $x^3 + 7x^2 + 10x = 0$

(2) $x^3 = -8$

(3) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

(4) $x^3 - 7x + 6 = 0$

(5) $x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x - 8 = 0$

53. 3 次方程式 $x^3 + ax + 2 = 0$ が -1 を解にもつとき、定数 a の値を求めよ。

54. 3 次方程式 $2x^3 + ax^2 + 3x + b = 0$ が 2 と 3 を解にもつとき、定数 a、b の値を求めよ。また、他の解を求めよ。