古谷数学教室第 7 回

平面ベクトル

2024 年 5 月 12 日

1　基礎事項

1.1　ベクトル

　向きをつけた線分を**有向線分**という。有向線分 AB では、A をその**始点**、B をその**終点**といい、その**向き**は A から B に向かっているとする。また、線分 AB の長さを、有向線分 AB の**大きさ**という。

　平面上で図形を平行移動する場合、その平行移動を表す有向線分は、いくつも図示できるが、それらは位置が違うだけて、向きと大きさは同じである。有向線分の位置の違いを無視して、その向きと大きさだけに着目したものを**ベクトル**という。ベクトルは、向きと大きさをもつ量[1] である。

　有向線分 AB が表すベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ で表す。また、ベクトルを $\vec{a}$、$\vec{b}$ などで表すこともある[2] 。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$、$\vec{a}$ の大きさは、それぞれ $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$、$|\vec{a}|$ で表す。

　向きが同じで大きさも等しい 2 つのベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$ は**等しい**といい、$\vec{a}=\vec{b}$ と書く。

　ベクトル $\vec{a}$ と大きさが等しく向きが反対のベクトルを、$\vec{a}$ の**逆ベクトル**といい、$-\vec{a}$ で表す。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のとき、$-\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ である。すなわち、

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

である。

1.2　ベクトルの演算

　ベクトルは、向きと大きさをもつ量である。ここでは、ベクトルについて、加法と減法を定義する。さらに、実数倍についても考える。

　ベクトル $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とベクトル $\vec{b}$ に対して、$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{b}$ となるように点 C をとる。このようにして定

1)　たとえば、速度や力などはベクトルである。

2)　大学物理では、$\vec{a}$ を $\boldsymbol{a}$ で表す。これは、ただの太字表記である。強調などで太字を用いる教科書が多いが、私が数式には太字を使わないのはこのためである。

まるベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を、$\vec{a}$、$\vec{b}$ の**和**といい、$\vec{a}+\vec{b}$ と書く。すなわち、次のことが成り立つ：

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}.$$

平行四辺形を使って、ベクトルの和を図示することもできる。平行四辺形 ABCD において、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ であるから、次のことが成り立つ：

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}.$$

ベクトルの加法について、次の性質が成り立つ：

ベクトルの加法の性質

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a},$$
$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のとき $-\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ であるから、$\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ となる。ここで、$\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ は始点と終点が一致した特別な有向線分が表すベクトルと考え、その大きさは 0 であるとする。大きさが 0 のベクトルを**零ベクトル**またはゼロベクトルといい、$\vec{0}$ で表す。零ベクトルの向きは考えない。

零ベクトルに関して、次の性質が成り立つ：

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0},$$
$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}.$$

ベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$ に対して、$\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$ を満たすベクトル $\vec{c}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**差**といい、$\vec{a}-\vec{b}$ と書く。

一般に、$\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから、次のことが成り立つ：

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}.$$

同様に、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ から、次のことが成り立つ：

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}.$$

ベクトルの減法について、次の性質が成り立つ：

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}),$$
$$\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}.$$

実数 k とベクトル $\vec{a}$ に対して、$\vec{a}$ の k 倍のベクトル $k\vec{a}$ を次のように定める：$\vec{a}\neq\vec{0}$ のとき、$k>0$ ならば、$\vec{a}$ と向きが同じで、大きさが k 倍のベクトルで、特に $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$ で、$k<0$ ならば、$\vec{a}$ と向きが反対で、大きさ $|k|$ 倍のベクトルで、$k=0$ ならば、$\vec{0}$ とする。すなわち、$0\vec{a}=\vec{0}$ である。

$\vec{a} = \vec{0}$ のとき、どんな k に対しても $k\vec{0} = \vec{0}$ とする。

k、l は実数とする。ベクトルの実数倍について、次の性質が成り立つ：

ベクトルの実数倍の性質

$$k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a},$$
$$(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a},$$
$$k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}.$$

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$ は、向きが同じか反対のとき、**平行**であるといい、$\vec{a}/\!/\vec{b}$ と書く。

$\vec{a} \neq \vec{0}$、$\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき、ベクトルの実数倍の定義により、次のことが成り立つ：

$$\vec{a}/\!/\vec{b} \Longleftrightarrow \text{「}\vec{b} = k\vec{a} \text{ となる実数 } k \text{ がある」}.$$

大きさが 1 のベクトルを**単位ベクトル**という。

一般に、$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$ が平行でないとき、どんなベクトル $\vec{p}$ も、$\vec{a}$、$\vec{b}$ と適当な実数 $\vec{a}$、$\vec{b}$ と適当な実数 s、t を用いて

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

の形に表すことができる。しかも、この表し方はただ 1 通りである。

1.3 ベクトルの成分

座標平面上でベクトルを考えるとき、ベクトルの表示に座標を利用する方法がある。ここでは、この方法について学ぶ。

O を原点とする座標平面上で、x 軸、y 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを**基本ベクトル**といい、それぞれ $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$ で表す。

座標平面上のベクトル $\vec{a}$ に対し、$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ である点 A の座標が $(a_1,\ a_2)$ のとき、$\vec{a}$ は次のように表される：

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2.$$

この $\vec{a}$ を次のようにも書く：

$$\vec{a} = (a_1,\ a_2). \tag{1}$$

式 (1) の a_1、a_2 を、それぞれ $\vec{a}$ の x 成分、y 成分といい、まとめて $\vec{a}$ の**成分**という。さらに、式 (1) を $\vec{a}$ の**成分表示**という。

基本ベクトル $\vec{e_1}$、$\vec{e_2}$ と零ベクトル $\vec{0}$ の成分表示は、次のようになる：

$$\vec{e_1} = (1,\ 0),$$
$$\vec{e_2} = (0,\ 1),$$
$$\vec{0} = (0,\ 0).$$

2 つのベクトル $\vec{a} = (a_1,\ a_2)$、$\vec{b} = (b_1,\ b_2)$ について、次が成り立つ：

$$\vec{a} = \vec{b} \Longleftrightarrow a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2.$$

$\vec{a} = (a_1,\ a_2)$ のとき、次のことがいえる：

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

k を実数とする。ベクトルの和、差、実数倍を成分表示すると、次のことが成り立つ：

和、差、実数倍の成分表示

$$(a_1,\ a_2) \pm (b_1,\ b_2) = (a_1 \pm b_1,\ a_2 \pm b_2),$$
$$k(a_1,\ a_2) = (ka_1,\ ka_2).$$

1.4　ベクトルの内積

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$ について、1 点 O を定め、$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$、$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる点 A、B をとる。このようにして定まる $\angle\mathrm{AOB}$ の大きさ θ を、$\vec{a}$、$\vec{b}$ の**なす角**という。ただし、$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ である。

$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**内積**といい、$\vec{a} \cdot \vec{b}$ で表す[3]：

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta.$$

$\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときは、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を 0 と定める。

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$ の成分表示を $\vec{a} = (a_x,\ a_y)$、$\vec{b} = (b_x,\ b_y)$ とすると、余弦定理を用いて

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b})$$
$$(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 = (a_x^2 + a_y^2) + (b_x^2 + b_y^2) - 2(\vec{a} \cdot \vec{b})$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

3)　2 つのベクトルの内積は、ベクトルではなく実数である。

となり、$\vec{a}=(a_x,\ a_y)$、$\vec{b}=(b_x,\ b_y)$ のとき、ベクトルの内積は、その成分を用いて次のように表される：

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y.$$

これは、$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときも成り立つ。

$\vec{a}=(a_x,\ a_y)$、$\vec{b}=(b_x,\ b_y)$ は $\vec{0}$ でないとし、そのなす角を θ とする。ただし、$0^\circ\leq\theta\leq180^\circ$ である。内積の定義から次のことが成り立つ：

ベクトルのなす角の余弦

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2}}.$$

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 90° のとき、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**垂直**であるといい、$\vec{a}\perp\vec{b}$ と書く。$\vec{a}\perp\vec{b}$ のとき、$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ である。逆に、$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$ が $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ になるのは、$\vec{a}\perp\vec{b}$ のときである。したがって、$\vec{0}$ でない 2 つのベクトルについて、$\vec{a}=(a_x,\ a_y)$、$\vec{b}=(b_x,\ b_y)$ 次のことが成り立つ：

ベクトルの垂直条件

$$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0,$$
$$\vec{a}\perp\vec{b}\iff a_xb_x+a_yb_y=0.$$

k を実数とする。ベクトルの内積について、次の性質が成り立つ：

内積の性質

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2,$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a},$$
$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c},$$
$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c},$$
$$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

2　演習問題

1. 下の図において、A のベクトルと比較して、

(1) 向きが同じベクトル

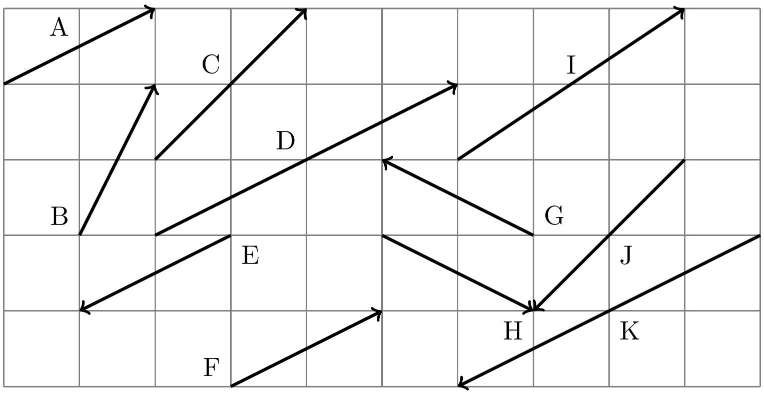
(2) 大きさが等しいベクトル

(3) 等しいベクトル

(4) 逆ベクトル

(5) 平行なベクトル

を選べ。



2. 次の等式が成り立つことを示せ：

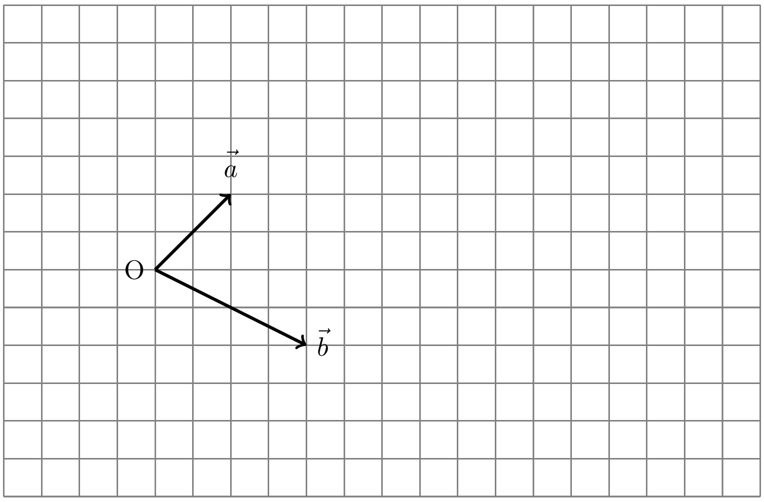
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} - \overrightarrow{\mathrm{RS}} = \overrightarrow{\mathrm{PR}} + \overrightarrow{\mathrm{SQ}}.$$

3. 下の図のベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$ について、次のベクトルを点 O を始点とする有向線分で表せ。

(1) $\vec{a} + \vec{b}$

(2) $3\vec{a}$

(3) $2\vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{b}$



4. 次の式を簡単にせよ。

(1) $\vec{a} + 2\vec{a} - 5\vec{a}$

(2) $-3(2\vec{a} - 3\vec{b}) - 4(-3\vec{a} - 2\vec{b})$

5. 等式 $2\vec{a} + \vec{x} = 2\vec{x} - 3\vec{b}$ を満たす $\vec{x}$ を $\vec{a}$、$\vec{b}$ を用いて表せ。

6. $|\vec{a}| = 6$ のとき、$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルを求めよ。

7. 平行四辺形 OACB において、対角線の交点を M とし、$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$、$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき、次のベクトルを $\vec{a}$、$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

8. 正六角形 ABCDEF において、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$、$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{b}$ とするとき、次のベクトルを $\vec{a}$、$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{EC}}$

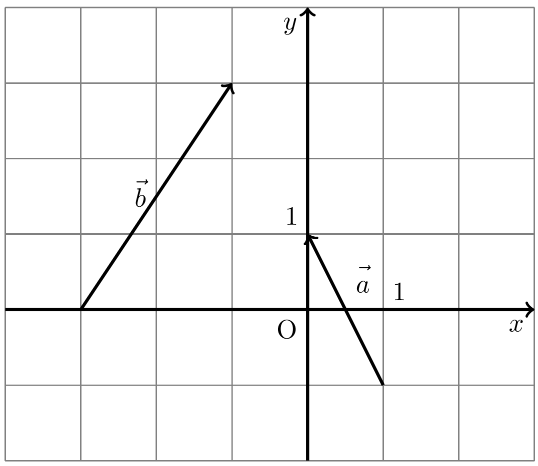
(3) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{EA}}$

9. 下の図の $\vec{a}$、$\vec{b}$ について、次のベクトルを成分表示せよ。

(1) $-2\vec{a}$

(2) $2\vec{a} - 3\vec{b}$



10. $\vec{a} = (-1,\ 1)$、$\vec{b} = (1,\ -3)$ のとき、ベクトル $\vec{p} = (-5,\ 3)$ を $s\vec{a} + t\vec{b}$ の形に表せ。

11. 2 つのベクトル $\vec{a} = (3,\ 4)$、$\vec{b} = (-6,\ t)$ が平行になるように、t の値を定めよ。

12. 次の 2 点 A(1, 3)、B(2, 5) について、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を成分表示せよ。また、その大きさを求めよ。

13. 4 点 A(-2, 3)、B(2, x)、C(8, 2)、D(y, 7) を頂点とする四角形 ABCD が平行四辺形となるように、x と y の値を定めよ。

14. $|\vec{a}| = 3$、$|\vec{b}| = 4$ とし、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。次の場合について、内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

(1) $\theta = 30^\circ$

(2) $\theta = 90^\circ$