古谷数学教室第 8 回

平面ベクトル、空間ベクトル

2024 年 5 月 19 日

1　基礎事項

1.1　位置ベクトル

平面上で、点 O を定めておくと、どんな点 P の位置も、ベクトル $\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ によって決まる。このようなベクトル $\vec{p}$ を、点 O に関する点 P の**位置ベクトル**という。また、位置ベクトルが $\vec{p}$ である点 P を、$\mathrm{P}(\vec{p})$ で表す。2 点の位置ベクトルが同じならば、その 2 点は一致する。位置ベクトルにおける点 O は、平面上のどこに定めてもよい。以下、とくに断らない限り、1 つ定めた点 O に関する位置ベクトルを考える。

2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$、$\mathrm{B}(\vec{b})$ に対して、線分 AB を $m:n$ に内分する点を $\mathrm{P}(\vec{p})$、$m:n$ に外分する点を $\mathrm{Q}(\vec{q})$ とする。一般に、次のことが成り立つ：

内分点・外分点の位置ベクトル

$$\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n},$$
$$\vec{q} = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}.$$

3 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$、$\mathrm{B}(\vec{b})$、$\mathrm{C}(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は、

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}.$$

1.2　ベクトルの図形への応用

異なる 2 点 A、B を通る直線 AB 上に点 C があるとき、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が平行であるか、または、$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{0}$ である。したがって、次のことが成り立つ：

$$「点\ \mathrm{C}\ が直線\ \mathrm{AB}\ 上にある」\iff「\overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}\ となる実数\ k\ がある」.$$

1.3　図形のベクトルによる表示

点 A($\vec{a}$) を通り、ベクトル $\vec{d}$ に平行な直線を g とする。直線 g 上のどんな点 P($\vec{p}$) に対しても、$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\vec{d}$ となる実数 t がただ 1 つ定まる。$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{p} - \vec{a}$ であるから、次の式が得られる：

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}. \tag{1}$$

式 (1) において、t がすべての実数値をとって変化すると、点 P($\vec{p}$) の全体は直線 g になる。式 (1) を直線 g の**ベクトル方程式**といい、実数 t を**媒介変数**という。また、$\vec{d}$ を直線 g の**方向ベクトル**という。

O を原点とする座標平面上で、点 A(a_x, a_y) を通り、$\vec{d} = (d_x,\ d_y)$ に平行な直線 g 上の点を P(x, y) とする。これより、ベクトル方程式 (1) から

$$\begin{cases} x = a_x + td_x \\ y = a_y + td_y \end{cases} \tag{2}$$

が得られる。式 (2) を、直線 g の**媒介変数表示**という。式 (2) から t を消去すると、次の式を得る：

$$d_y(x - a_x) - d_x(y - a_y) = 0.$$

点 A($\vec{a}$) を通る直線 g 上に A と異なる点 B($\vec{b}$) があるとき、式 (1) で

$$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$$

とすると、直線 g 上の点 P($\vec{p}$) について、次の式が得る：

$$\vec{p} = (1 - t)\vec{a} + t\vec{b}. \tag{3}$$

式 (3) において、$1{-}t = s$ とすると、$0 \leq t \leq 1$ のとき、≥ 0 であるから、次の式を満たす点 P($\vec{p}$) の存在範囲は、線分 AB である：

$$\begin{cases} \vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} \\ s + t = 1 \\ s \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases}.$$

点 A($\vec{a}$) を通り、ベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線を g とする。直線 g 上の点 P($\vec{p}$) が A に一致しないとき、$\vec{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$ となり、次の式を得る：

$$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0. \tag{4}$$

P が A に一致するときは、$\vec{p} - \vec{a} = \vec{0}$ であるから、このときも式 (4) は成り立つ。

式 (4) は、点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り、$\vec{n}$ に垂直な直線 g のベクトル方程式である。直線 g に垂直なベクトル $\vec{n}$ を、直線 g の**法線ベクトル**という。

式 (2) のときと同様に、点 $\mathrm{A}(a_x,\ a_y)$ を通り、$\vec{n} = (n_x,\ n_y)$ に垂直な直線方程式は

$$n_x(x - a_x) + n_y(y - a_y) = 0$$

である。

点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を中心とする半径 r の円を考える。この円上のどんな点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ に対しても、次の式が成り立つ：

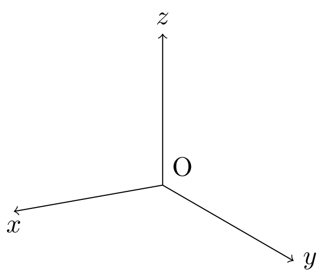
$$|\vec{p} - \vec{a}| = r. \tag{5}$$

これより、次の円のベクトル方程式を得る：

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = r^2.$$

1.4　空間の点

空間に点 O をとり、O で互いに直交する 3 本の数直線を、下の図のように定める[1]。



x 軸と y 軸で定まる平面を xy 平面、y 軸と z 軸で定まる平面を yz 平面、z 軸と x 軸で定まる平面を zx 平面といい、これらをまとめて**座標平面**という。

空間の点 P に対して、P を通り、各座標軸に垂直な平面が、x 軸、y 軸、z 軸と交わる点を、それぞれ A、B、C の各座標軸上での座標が、それぞれ a、b、c のとき、3 つの実数の組 (a, b, c) を点 P の**座標**といい、a、b、c をそれぞれ点 P の x 座標、y 座標、z 座標という。この点 $\mathrm{P}(a, b, c)$ と書くことがある。座標の定められた空間を**座標空間**という。

原点と点 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$ の距離は、

$$\mathrm{OP} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

である。

1)　これ図のとき、右手系の座標という。x と y を入れ替えたものは、左手系の座標という。ぶっちゃけどっちの系を用いても構わないが、高校で扱う数学は右手系で統一されていると言っても言い過ぎではないため、左手系を用いるなら苦労するだろう。左利きの私ですら、左手系は使ったことがない。

1.5　空間のベクトル

空間において、始点 A、終点 B とする。有向線分 AB が表すベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ で表す。

つまり、空間のベクトルも平面と同様に表す。

空間において、同じ平面上にない 4 点 O、A、B、C が与えられ、$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$、$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$、$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする。この空間のどんなベクトル $\vec{p}$ も、適当な実数 s、t、u を用いて次のように表せる：

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}.$$

1.6　ベクトルの成分

座標空間において、$\vec{a} = \overline{\mathrm{OA}}$ となる点 A の座標が $(a_x,\ a_y,\ a_z)$ であるとする。このとき、

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

が成り立つ。

平面上の場合と同様に、空間のベクトルの和、差、実数倍の成分表示について次のことが成り立つ：

和、差、実数倍

$$(a_x,\ a_y,\ a_z) \pm (b_x,\ b_y,\ b_z) = (a_x \pm b_x,\ a_y \pm b_y,\ a_z \pm b_z),$$
$$k(a_x,\ a_y,\ a_z) = (ka_x,\ ka_y,\ ka_z).$$

ただし、k は実数である。

2　演習問題

1. $\triangle$ABC は、AB $= 5$、AC $= 2$、$\angle$BAC $= 60°$ で、頂点 C から、底辺 AB に垂線 CH を下ろす。次の内積を求めよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CH}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$

2. 次の 2 つのベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$ の内積と、そのなす角 θ を求めよ。

(1) $\vec{a}=(3,\ 6)$、$\vec{b}=(2,\ -6)$

(2) $\vec{a}=(2,\ 1)$、$\vec{b}=(3,\ -6)$

3. 次の 2 つのベクトル $\vec{a}=(3,\ k)$、$\vec{b}=(2,\ -k)$ が垂直となるように、k の値を定めよ。

4. $\vec{a}=(1,\ -1)$ に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ。

5. 等式 $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}+2\vec{b})=|\vec{p}|^2-(\vec{a}-2\vec{b})\cdot\vec{p}-2\vec{a}\cdot\vec{b}$ を示せ。

6. $|\vec{a}|=2$、$|\vec{b}|=1$ で、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° のとき、ベクトル $2\vec{a}+3\vec{b}$ の大きさを求めよ。

7. 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$、$\mathrm{B}(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB について、次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$、$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $3:5$ に内分する点

(2) $3:5$ に外分する点

8. $\triangle$ABC の辺 BC、CA を $2:3$ に内分する点をそれぞれ D、E、$\triangle$ABC の重心を G とする。次のベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$、$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$

9. 六角形 ABCDEF の各辺の中点を順に L、M、N、P、Q、R とするとき、$\triangle$LNQ の重心と $\triangle$MPR の重心は一致することを証明せよ。

10. $\triangle$ABC の重心 G、同じ平面上の任意の点を P とするとき、等式 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}-2\overrightarrow{\mathrm{CP}}=3\overrightarrow{\mathrm{GC}}$ が成り立つことを証明せよ。

11. 3 点 $(1,\ x)$、$(x,\ 0)$、$(-1,\ 6)$ が一直線上にあるように、x の値を定めよ。

12. $\angle$A が直角である直角二等辺三角形 ABC の 3 つの辺 BC、CA、AB を $3:2$ に内分する点をそれぞれ L、M、N とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$、$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AL}}$、$\overrightarrow{\mathrm{NM}}$ を $\vec{b}$、$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AL}} \perp \overrightarrow{\mathrm{NM}}$ であることを示せ。

13. $\vec{a} \neq \vec{0}$、$\vec{b} \neq \vec{0}$ で $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないとする。等式 $s\vec{a} + (3-2t)\vec{b} = \vec{0}$ を満たす実数 s、t の値を求めよ。

14. 点 A$(2,\ -1)$ を通り、$\vec{d} = (-1,\ 2)$ が方向ベクトルである直線の媒介変数表示を、媒介変数を t として求めよ。また、t を消去した式で表せ。

15. 次の 2 点 A$(2,\ 4)$、B$(1,\ -1)$ を通る直線の媒介変数表示を、媒介変数を t として求めよ。また、t を消去した式で表せ。

16. 次の点 A$(1,\ 2)$ を通り、$\vec{n} = (1,\ -2)$ が法線ベクトルである直線の方程式を求めよ。

17. 次のような円、直線の方程式を、ベクトルを利用して求めよ。

(1) 点 C$(3,\ 2)$ が中心で、点 A$(1,\ 1)$ を通る円

(2) 2 点 A$(1,\ 4)$、B$(3,\ 0)$ を直径の両端とする円

18. 2 直線 $2x + 4y + 1 = 0$、$x - 3y + 7 = 0$ のなす鈍角 α を求めよ。

19. 点 P$(-3,\ 6,\ -5)$ から、xy 平面、yz 平面、zx 平面に下ろした垂線をそれぞれ PL、PM、PN とするとき、3 点 L、M、N の座標を求めよ。

20. xy 平面、z 軸、原点に関して、点 $(-2,\ -3,\ 4)$ と対称な点の座標を求めよ。

21. 2 点 A$(1,\ -2,\ 3)$、B$(3,\ 2,\ -2)$ の 2 点間距離を求めよ。

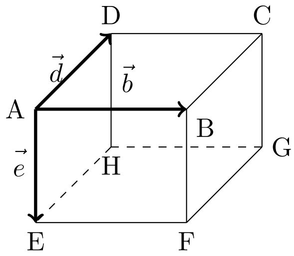
22. 3 点 A$(1,\ 2,\ 3)$、B$(3,\ 1,\ 5)$、C$(2,\ 4,\ 3)$ を頂点とする $\triangle$ABC はどのような三角形か答えよ。

23. 3 点 A$(3,\ 1,\ 2)$、B$(-1,\ 3,\ 0)$、C$(2,\ -1,\ 1)$ から等距離にある yz 平面上の点 P の座標を求めよ。

24. 正四面体の 3 つの頂点が A$(0,\ 1,\ -2)$、B$(3,\ 4,\ -2)$、C$(0,\ 4,\ 1)$ であるとき、第 4 の頂点 D

の座標を求めよ。

25. 下の図のような平行六面体 ABCD − EFGH において、次のベクトルを $\vec{b}$、$\vec{d}$、$\vec{e}$ を用いて表せ。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{DG}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$

26. 四面体 ABCD において、等式 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{BD}}$ が成り立つことを証明せよ。

27. $\vec{a} = (1,\ -1,\ 2)$、$\vec{b} = (0,\ 2,\ 1)$ のとき、ベクトル $2\vec{a} + 3\vec{b}$ を成分表示せよ。

28. B(1, −1, 1)、C(2, 1, −1) のとき、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を成分表示せよ。また、その大きさを求めよ。

29. $\vec{a} = (1,\ 2,\ 3)$、$\vec{b} = (0,\ 2,\ 5)$、$\vec{c} = (1,\ 3,\ 2)$ のとき、ベクトル $\vec{p} = (0,\ 3,\ 12)$ を $s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$ の形に表せ。