# 古谷数学教室第 9 回

空間ベクトル、図形の性質

2024 年 5 月 26 日

## 1　基礎事項

### 1.1　ベクトルの内積、外積

空間ベクトルの内積も、平面ベクトルと同様である。

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

とする。外積の定義は

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

なので、

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2 \\ &= ({a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2)({b_x}^2 + {b_y}^2 + {b_z}^2) - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2 \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \theta) \quad (\text{ただし } \theta \text{ は } \vec{a} \text{ と } \vec{b} \text{ のなす角}) \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

である。$|\vec{a} \times \vec{b}| \geq 0$ なので、

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \theta$$

となる。

### 1.2　座標空間における図形

明らかに、次のことがいえる：

**座標平面に平行な平面の方程式**

点 A$(\alpha,\ 0,\ 0)$ を通り、$yz$ 平面に平行な平面の方程式は $x = \alpha$.

**球面の方程式**

点 $(a,\ b,\ c)$ を中心とする半径 $r$ の球面の方程式は

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2.$$

### 1.3 三角形の辺の比

$m$、$n$ を正の数とする。線分 AB 上の点 P が

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$$

を満たすとき、点 P は線分 AB を $m : n$ に**内分する**という。次に、$m$、$n$ を異なる正の数とする。線分 AB の延長上の点 Q が

$$\mathrm{AQ} : \mathrm{QB} = m : n$$

を満たすとき、点 Q は線分 AB を $m : n$ に**外分する**という。

三角形の角の二等分線に関して、次の定理が成り立つ：

**三角形の角の二等分線と比**

$\triangle\mathrm{ABC}$ の $\angle\mathrm{A}$ の二等分線と辺 BC との交点は、辺 BC を AB : AC に内分する。

**証明** $\angle\mathrm{A}$ の二等分線と辺 BC の交点を D とすると、

$$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{DAC}. \tag{1}$$

頂点 C を通り直線 AD に平行な直線を引き、辺 AB の A を超える延長との交点を E とすると、AD//EC から、

$$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{AEC}, \tag{2}$$

$$\angle\mathrm{DAC} = \angle\mathrm{ACE}. \tag{3}$$

式 (1)、式 (2)、式 (3) から、$\triangle\mathrm{ACE}$ において $\angle\mathrm{AEC} = \angle\mathrm{ACE}$ となるから

$$\mathrm{AE} = \mathrm{AC}.$$

また、AD//EC から

$$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{BA} : \mathrm{AE},$$

したがって、

$$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC} \quad \blacksquare$$

三角形の外角の二等分線に関して、次の定理が成り立つ：

**三角形の外角の二等分線と比**

$\mathrm{AB} \neq \mathrm{AC}$ である $\triangle \mathrm{ABC}$ の $\angle \mathrm{A}$ の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点は、辺 BC を $\mathrm{AB} : \mathrm{AC}$ に外分する。

**証明**　$\mathrm{AB} > \mathrm{AC}$ とする。$\angle \mathrm{A}$ の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を D、頂点 C を通り、直線 AD と平行な直線を引き、辺 AB との交点を E とする。このとき、さっきの証明と同様に

$$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC} \quad \blacksquare$$

## 1.4　三角形の外心、内心、重心

三角形の辺の垂直二等分線について、次の定理が成り立つ：

**三角形の辺の垂直二等分線**

三角形の 3 辺の垂直二等分線は、1 点で交わる。

**証明**　$\triangle \mathrm{ABC}$ において、辺 AB の垂直二等分線と辺 AC の垂直二等分線の交点を O とすると、

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB}, \quad \mathrm{OA} = \mathrm{OC}.$$

よって、$\mathrm{OB} = \mathrm{OC}$ となるから、O は辺 BC の垂直二等分線上にもある。したがって、三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる　$\blacksquare$

$\triangle \mathrm{ABC}$ において、3 辺の垂直二等分線が交わる点を O とすると、点 O は $\triangle \mathrm{ABC}$ の 3 つの頂点から等距離にある。よって、この点 O を中心とする半径 OA の円は、$\triangle \mathrm{ABC}$ の 3 つの頂点を通る。この円を $\triangle \mathrm{ABC}$ の**外接円**といい、点 O を $\triangle \mathrm{ABC}$ の**外心**という。

三角形の内心の二等分線について、次の定理が成り立つ：

**三角形の内角の二等分線**

三角形の 3 つの内角の二等分線は 1 点で交わる。

**証明**　$\triangle \mathrm{ABC}$ において、$\angle \mathrm{B}$ の二等分線と $\angle \mathrm{C}$ の二等分線の交点を I とし、I から辺 BC、CA、AB に下ろした垂線を、それぞれ ID、IE、IF とすると、$\mathrm{IF} = \mathrm{ID}$、$\mathrm{IE} = \mathrm{ID}$、$\mathrm{IF} = \mathrm{IE}$ となるから、I は $\angle \mathrm{A}$ の二等分線上にもある。よって、三角形の 3 つの内角の二等分線は 1 点で交わる　$\blacksquare$

上の証明により、次のことがいえる：

$$\mathrm{ID} = \mathrm{IE} = \mathrm{IF}.$$

よって、この点 I を中心とする半径 ID の円は、△ABC の 3 辺に接する。この円を △ABC の**内接円**といい、点 I を △ABC の**内心**という。

三角形の頂点とそれに向かい合う辺の中点を結ぶ線分を、三角形の**中線**という。三角形の中線には、次の性質がある：

**三角形の中線**

三角形の 3 本の中線は 1 点で交わり、その点は各中線を 2 : 1 に内分する。

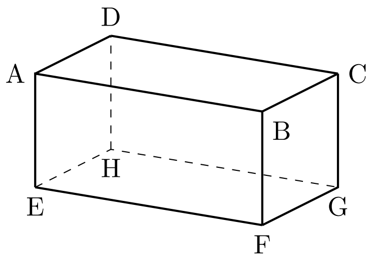
## 2 演習問題

**1.** 下の図のような AD = AE = 1、AB = $\sqrt{3}$ の直方体において、次の内積を求めよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CG}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{GE}}$



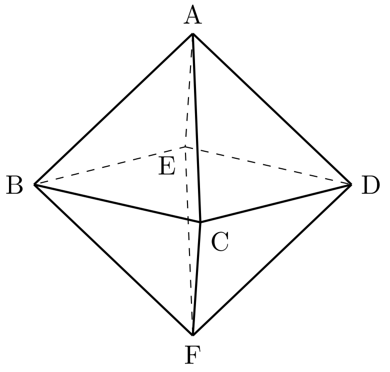

**2.** $\vec{a} = (1,\ -1,\ 1)$、$\vec{b} = (1,\ \sqrt{6},\ -1)$ の内積と、そのなす角 $\theta$ を求めよ。

**3.** $\vec{m} = (2,\ 1,\ 3)$、$\vec{n} = (1,\ 1,\ a)$ が垂直になるように、$a$ の値を定めよ。

**4.** 2 つのベクトル $\vec{a} = (0,\ 2,\ 1)$、$\vec{b} = (2,\ -2,\ 1)$ の両方に垂直で、大きさ 3 であるベクトルを求めよ。

**5.** A($\vec{a}$)、B($\vec{b}$)、C($\vec{c}$)、D($\vec{d}$) を頂点とする四面体の辺 BC を 1 : 2 に内分する点を P、線分 DP を 3 : 2 に外分する点を Q とする。点 Q の位置ベクトルを、$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$ を用いて表せ。

**6.** 下の図の正八面体 ABCDEF において、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$、$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とする。△DEF の重心を G とするとき、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$ を用いて表せ。




**7.** 3 点 A($a$, $-1$, 5)、B(4, $b$, $-7$)、C(5, 5, $-13$) が一直線上にあるように、$a$、$b$ の値を定めよ。

**8.** 次の 4 点が同じ平面上にあるように、$a$ の値を定めよ：

$$\mathrm{A}(3,\ 1,\ 2),\quad \mathrm{B}(4,\ 2,\ 3),\quad \mathrm{C}(5,\ 2,\ 5),\quad \mathrm{D}(-2,\ -1,\ a).$$

**9.** 3 点 A(3, $-3$, $-1$)、B(2, 0, 5)、C(4, $-1$, 5) に対して、次の各点の座標を求めよ。

(1) 線分 AB を 3 : 5 に内分する点 P

(2) 線分 BC の中点 Q

(3) 線分 AB を 1 : 3 に外分する点 R

(4) △ABC の重心 G

**10.** 点 A(8, $-2$, 4) を通る、次のような平面の方程式を求めよ。

(1) $x$ 軸に垂直

(2) $zx$ 平面に平行

**11.** 次のような球面の方程式を求めよ。

(1) 中心が C(1, 2, 3)、半径が 3 の球面

(2) 2 点 A($-1$, 2, 3)、B(3, 6, $-1$) を直径の両端とする球面

**12.** 球面 $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$ が、次の座標平面または平面と交わる部分は円である。その円の中心の座標と半径を求めよ。

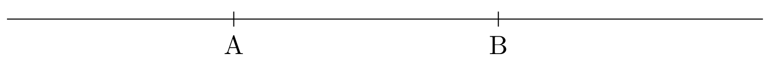
(1) $xy$ 平面

(2) 平面 $z=2$

**13.** 下の図の線分 AB について、次の点を記入せよ。

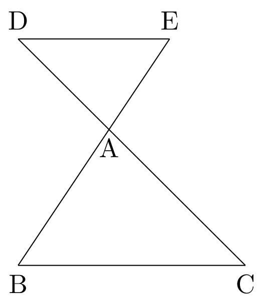
(1) 3 : 2 に内分する点 P

(2) 2 : 3 に外分する点 $S$

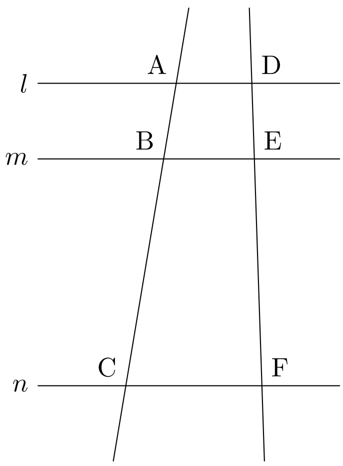



**14.** 下の図において、$x$、$y$ の値を求めよ。

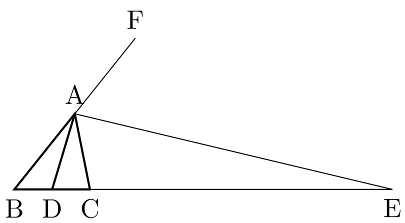
(1) BC//DE、AB $=4$、AC $=5$、AD $=3$、AE $=x$、BC $=6$、DE $=y$



(2) $l // m // n$、$\mathrm{AD} = 2$、$\mathrm{DE} = 2$、$\mathrm{BE} = 3$、$\mathrm{EF} = x$、$\mathrm{CF} = 5$




(3) $\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{DAC}$、$\angle\mathrm{CAE} = \angle\mathrm{EAF}$、$\mathrm{AB} = 12$、$\mathrm{AC} = 8$、$\mathrm{BC} = 10$、$\mathrm{DC} = x$、$\mathrm{BE} = y$




**15.** △ABC の外心を O、内心を I とする。次の $\alpha$、$\beta$ の大きさを求めよ。

(1) $\angle\mathrm{A} = \alpha$、$\angle\mathrm{ABO} = 36^\circ$、$\angle\mathrm{ACO} = 25^\circ$、$\angle\mathrm{BOC} = \beta$。

(2) $\angle\mathrm{ACI} = \alpha$、$\angle\mathrm{IAB} = 35^\circ$、$\angle\mathrm{IBC} = 20^\circ$、$\angle\mathrm{BIC} = \beta$。

**16.** $\mathrm{AB} = 10$、$\mathrm{BC} = 7$、$\mathrm{CA} = 4$ である △ABC の内心を I とする。AI と辺 BC の交点を D とするとき、BD : DC、AI : ID をそれぞれ求めよ。

**17.** △ABC において、辺 BC の中点 D、辺 AC の中点 E とし、線分 AD と線分 BE の交点を F とする。△ABC の面積を $S$ とするとき、△ABC、△ABF の面積をそれぞれ求めよ。