古谷数学教室第 10 回

図形の性質

2024 年 6 月 16 日

1　基礎事項

1.1　チェバの定理・メネラウスの定理

$\triangle$ABC の内部に点 O がある。頂点 A、B、C と O を結ぶ直線が向かい合う辺と、それぞれ点 P、Q、R で交わるとき、次の**チェバの定理**が成り立つ：

チェバの定理

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1.$$

$\triangle$ABC の辺 BC、CA、AB またはその延長が、三角形の頂点を通らない直線 l と、それぞれ点 P、Q、R で交わるとき、次の**メネラウスの定理**が成り立つ：

メネラウスの定理

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1.$$

1.2　円に内接する四角形

円の弧と弦については、次のような性質がある：

円の弧と弦の性質

1. 1 つの円で、等しい中心角に対する弧の長さは等しい。逆に、長さの等しい弧に対する円周角は等しい。

2. 1 つの円で、長さの等しい弧に対する弦の長さは等しい。

3. 弦の垂直二等分線は、円の中心を通る。

4. 円の中心から弦に引いた垂線は、その弦を二等分する。

円周角の定理について、確認しておく：

円周角の定理

1 つの弧に対する円周角の大きさは一定であり、その弧に対する中心角の大きさの半分である。

円周角の定理は、その逆も成り立つ：

円周角の定理の逆

4 点 A、B、P、Q について、点 P、Q が直線 AB に関して同じ側にあって

$$\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{AQB}$$

ならば、4 点 A、B、P、Q は 1 つの円周上にある。

多角形のすべての頂点が 1 つの円周上にあるとき、この多角形は円に**内接する**という。また、この円をその多角形の**外接円**という。三角形には必ず外接円が存在するが、三角形以外の多角形では外接円が存在するとは限らない。

円に内接する四角形には、次の性質がある：

円に内接する四角形の性質

1. 対角の和は 180° である。

2. 内角は、その対角の外角に等しい。

上の定理の逆も成り立つ。

1.3　円と直線

円と直線が接するとき、それらはただ 1 点を共有する。このとき、この直線を円の接線といい、その共有点を接点という。ここでは、円の接線や円と直線に関する性質を調べる。

円 O の周上の点 A を通る直線 l について、次が成り立つ：

$$\text{「直線 } l \text{ が点 A で円 O に接する」} \Longleftrightarrow \mathrm{OA} \perp l.$$

この直線 l が、点 A における円の接線である。

円 O には外部の点 P から 2 つの接線を引くことができる。その接点を A、B とするとき、戦分 PA または PB の長さを、P から円 O に引いた**接線の長さ**という。円に引いた 2 つの接線の長さについては、次のことがいえる：

円の外部の 1 点からその円に引いた 2 つの接線の長さは等しい。

一般に、次の定理が成り立つ：

円の接線と弦の作る角

円の接線とその接点を通る弦の作る角は、その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。

また、次の**方べきの定理**が成り立つ：

方べきの定理

円の 2 つの弦 AB、CD の交点、またはそれらの延長の交点を P とすると、$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} = \mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$ が成り立つ。

1.4　2 つの円

2 つの円の位置関係には、次の場合がある：

1. 一方が他方の外部にある。

2. 1 点を共有し、外接する。

3. 2 点で交わる。

4. 1 点を共有し、内接する。

5. 一方が他方の内部にある。

2 つの円が接するとき、接点は 2 つの円の中心を通る直線上にある。

1.5　作図

作図では、定規とコンパスを用いて、

1. 与えられた 2 点を通る直線を引くこと

2. 与えられた 1 点を中心として、与えられた半径の円をかくこと

だけができる。それらの直線や円などの交点を求めて、次々と点、直線、円をかき、条件を満たす図形をかくことが作図である。

直線 l 上にない点 P を通り、l に平行な直線は、次のように作図する：

1. 点 P を通る直線 l の垂線 m を作図する。

2. 点 P を中心とする円をかき、直線 m との交点をそれぞれ A、B とする。

3. 2 点 A、B をそれぞれ中心として、等しい半径の円をかき、それらの交点の 1 つを C とする。

4. 直線 PC を引く。直線 PC が点 P を通り l に平行な直線である。

与えられた線分 AB を $m : n$ に内分する点は、次のように作図する：

1. 点 A を通り、直線 AB と異なる半直線 l を引く。

2. l 上に、$\mathrm{AC} : \mathrm{CD} = m : n$ となるように点 C、D をとる[1)]。

3. 点 C を通り、直線 BD に平行な直線を引き、線分 AB との交点を E とする。点 E が求める点である。

長さ 1 の線分 AB と、長さ a、b の 2 つの線分が与えられたとき、長さ $\dfrac{b}{a}$ の線分は、次のように作図する：

1. 点 A を通り、直線 AB と異なる半直線 l を引く。

2. l 上に、$\mathrm{AC} = a$、$\mathrm{CD} = b$ となる点 C、D をとる。

1)　定規とは、メモリが書いていないものさしを意味する。すなわち、$m : n$ はコンパスを用いて点 C、D をとるのである。

3. D を通り、直線 BC に平行な直線を引き、直線 AB との交点を E とする。線分 BE が求める線分である。

長さ 1 の線分が与えられたとき、無理数で表される線分は次のように作図する：

1. 長さ 1 の正方形を作図する。このとき、対角線が $\sqrt{2}$ である。

2. 対角線の $\sqrt{2}$ と長さ 1 から、三平方の定理より $\sqrt{3}$ の線分が作れる。

3. これを繰り返すと、n を自然数とすると $\sqrt{n}$ の線分が作れる。

1.6　直線と平面

異なる 2 直線 l、m の位置関係には、次の 3 つの場合がある：

1. 1 点で交わる。

2. 平行である。

3. ねじれの位置にある。

2 直線 l と m が平行であるとき、$l//m$ と書く。異なる 3 直線 l、m、n について、次のことが成り立つ：

$$l//m,\ m//n \Longrightarrow l//n.$$

2 直線 l、m が平行でないとき、任意の 1 点 O を通り、l、m に平行な直線を、それぞれ l'、m' とすると、l' と m' は同じ 1 つの平面上にある。このとき、l' と m' のなす 2 つの角は、点 O をどこにとっても一定である。この角を 2 直線 l、m の**なす角**という。

2 直線 l、m のなす角が直角のとき、l、m は**垂直**であるといい、$l \perp m$ と書く。垂直な 2 直線 l と m が交わるとき、l と m は**直交**するという。

また、次のことが成り立つ：

平行な 2 直線の一方に垂直な直線は、他方にも垂直である。

直線 l と平面 α の位置関係には、次の 3 つの場合がある：

1. l は α に含まれる。

2. 1 点で交わる。

3. 平行である。

直線 l と平面 α が平行であるとき、$l//\alpha$ と書く。直線 l が、平面 α 上のすべての直線に垂直であるとき、l は α に**垂直**である、または l は α に**直交**するといい、$l \perp \alpha$ と書く。このとき、l を平面 α の**垂直**という。

直線と平面の垂直について、次が成り立つことが知られている。

直線 l が、平面 α 上の交わる 2 直線 m、n に垂直ならば、直線 l は平面 α に垂直である。

異なる 2 平面 α、β の位置関係には、次の 2 つの場合がある：

1. 交わる。

2. 平行である。

2 平面が交わるとき、その交わりは直線になり、その直線を**交線**という。2 平面 α、β が平行であるとき、$\alpha//\beta$ と書く。

交わる 2 平面の交線上の点から、各平面上で、交線に垂直に引いた 2 直線のなす角を 2 平面の**なす角**という。2 平面のなす角が直角のとき、α、β は**垂直**である、または**直交**するといい、$\alpha \perp \beta$ と書く。

2 平面の垂直について、次のことが成り立つ：

平面 α に垂直な直線を含む平面は、α に垂直である。

1.7　空間図形と多面体

三角錐、四角柱などのように、平面だけで囲まれた立体を**多面体**といい、へこみのない多面体を**凸多面体**という。

次を満たす凸多面体を**正多面体**という：

1. 各面はすべて合同な正多角形である。

2. 各張点に集まる面の数はすべて等しい。

正多面体は 5 種類しかないことが知られている。

一般に、凸多面体の頂点の数を v、辺の数を e、面の数を f とすると、

$$v - e + f = 2$$

が成り立つことが知られている。これを**オイラーの多面体定理**という。

2 演習問題

1. △ABC について、点 P、Q、R はそれぞれ辺 BC、CA、AB の内分点である。CQ : QA、AR : RB が以下で与えられているとき、BP : PC を求めよ。

(1) CQ : QA = 5 : 2、AR : RB = 3 : 2

(2) CQ : QA = 4 : 3、AR : RB = 1 : 2

2. △ABC について、次の問いに答えよ。

(1) 辺 BC を 9 : 4 に外分する点を P、辺 CA を 1 : 1 に内分する点を Q とする。このとき、辺 AB の内分点を R とし、AR : RB を求めよ。

(2) 辺 AB を 3 : 2 に内分する点を D、辺 CA を 1 : 2 に内分する点を E とする。また、直線 CD と BE の交点を P とする。このとき、BP : PE、CP : PD を求めよ。

3. 次の長さの線分を 3 辺とする三角形が存在するかどうかを調べよ。

(1) 2、3、6

(2) 5、7、8

4. △ABC において、次のものをそれぞれ調べよ。

(1) AB = $\sqrt{3}$、BC = 3、CA = 2 のとき、3 つの角の大小

(2) ∠A = 60°、∠B = 40° のとき、3 辺の長さの大小

5. △ABC の ∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき、AB、BD の長さの大小を比べよ。

6. 円に内接する四角形 ABCD について、次の角度を求めよ。

(1) $\angle \mathrm{ACB} = 30^\circ$、$\angle \mathrm{BDC} = 60^\circ$、$\angle \mathrm{CAD} = 40^\circ$ のとき、$\angle \mathrm{ABD}$

(2) 半直線 AD と半直線 BC の交点を E、$\angle \mathrm{BAD} = 60^\circ$、$\angle \mathrm{BED} = 50^\circ$ のとき、$\angle \mathrm{CDE}$

(3) 半直線 AD と半直線 BC の交点を P、半直線 AB と半直線 DC の交点を Q、$\angle \mathrm{DPC} = 34^\circ$、$\angle \mathrm{BQC} = 28^\circ$ のとき、$\angle \mathrm{DAB}$

7. 円に内接する四角形 ABCD がある。辺 AB、CD 上にそれぞれ点 E、F をとり、AD//EF となるようにするとき、4 点 B、C、F、E は 1 つの円周上にあることを証明せよ。

8. 次の問いに答えよ。

(1) 中心 O、半径 6 の円の円周上の点 P で接する接線 AP について、$\mathrm{OA} = 10$ のとき、AP の長さを求めよ。

(2) 三角形 ABC の内接円があり、辺 AB との接点は辺 AB を 4 : 5 に内分し、$\mathrm{BC} = 11$ のとき、AC の長さを求めよ。

(3) 円に内接する三角形 ABC について、$\angle \mathrm{A} = 50^\circ$、$\angle \mathrm{B} = 80^\circ$ であり、直線 l が点 C でこの円に接している。このとき、直線 AB と直線 l の小さい方のなす角を求めよ。

(4) 点 P は、円 O の外部の点で、点 P から円 O に引いた接点をそれぞれ A、B とする。円周上の点 C について、$\angle \mathrm{ACB} = 50^\circ$ のとき、$\angle \mathrm{BPA}$ を求めよ。

(5) 円周上の 4 点 A、B、C、D について、線分 AB、線分 CD の交点を P とするとき、$\mathrm{AP} = 5$、$\mathrm{CP} = 4$、$\mathrm{PD} = 3$ であった。このとき、BP の長さを求めよ。

(6) 円周上の 4 点 A、B、C、D について、半直線 AB と半直線 CD の交点を P とするとき、$\mathrm{AB} : \mathrm{BP} = 5 : 4$、$\mathrm{CD} = \mathrm{EP}$ であった。このとき、CD の値を求めよ。

(7) 円 O の円周上の 2 点 B、C について、線分 BC を 9 : 4 に外分する点を P とし、P から円 O に引いた接線と円の接点を A としたとき、線分 AP の長さを求めよ。

9. 長さが 4 である線分 AB の中点を C、線分 AC を直径とする円に点 B から引いた接線の接点を D とする。次のものを求めよ。

(1) BD の長さ

(2) AD : CD

(3) AD、CD の長さ

10. 半径が 8、5 である 2 つの円の中心間の距離が次のような場合、この 2 つの円の位置関係と共通接線の本数を答えよ。

(1) 3

(2) 6

(3) 13

(4) 16

(5) 1

11. 半径 12 の円 O と半径 5 の円 O' の中心間距離が 25 であり、この 2 つの円の共通接線を l とする。次の問いに答えよ。

(1) l と O と円 O' の接点をそれぞれ A、B とし、線分 OO' と線分 AB が交点をもたないとき、線分 AB の長さを求めよ。

(2) l と O と円 O' の接点をそれぞれ A、B とし、線分 OO' と線分 AB が交点をもつとき、線分 AB の長さを求めよ。

12. 2 点で交わる 2 つの円 O、O' と、点 P で交わる 2 つの共通接線 AB と CD がある。このとき、次のことを証明せよ。

(1) $\mathrm{AB} = \mathrm{CD}$

(2) P、O、O' は一直線上にある。

13. 点 P と、直線 l、および l 上の点 Q がある。次のような直線を作図せよ。

(1) 点 P を通り、l に平行な直線

(2) 点 P を通り、l に垂直な直線

(3) 点 Q を通り、l に垂直な直線

14. 線分 AB がある。次の分点を作図せよ。

(1) $5:2$ に内分する点

(2) 中点

(3) $5:2$ に外分する点

(4) $2:5$ に外分する点

15. 長さ a、b、1（ただし、$1<b<a$）の線分がある。このとき、次の長さをもつ線分を作図せよ。

(1) ab

(2) $a \div b$

(3) $\sqrt{a}$

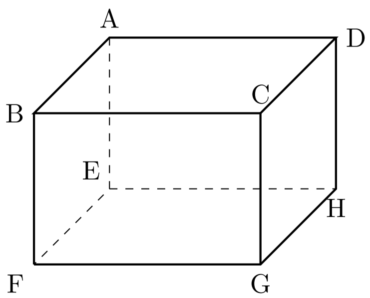
16. $\angle$POQ の辺 OQ 上に点 R がある。点 R で OQ に接する円のうち、辺 OP にも接する円を作図せよ。

17. $\mathrm{AB}=1$、$\mathrm{BF}=1$、$\mathrm{AD}=\sqrt{3}$ をみたす、下の図の直方体 ABCD−EFGH について、次の直線のなす角 θ を求めよ。ただし、$0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ とする。

(1) AB、CG

(2) AB、FH

(3) AF、CH

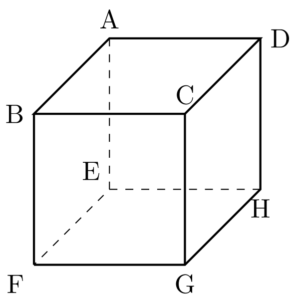


18. 下の図の立方体について、次の問いに答えよ。

(1) 辺 BF と垂直な面、平行な面はどれか答えよ。

(2) 平面 BFHD と平行な辺はどれか答えよ。また、垂直な線分はどれか答えよ。

(3) FH $\perp$ AE、FH $\perp$ AC、EC $\perp$ FH であることを示せ。



19. 次の多面体の面の数、辺の数、頂点の数を、それぞれ求めよ。また、(頂点の数) $-$ (辺の数) $+$ (面の数) $= 2$ が成り立つことを確かめよ。

(1) 四面体

(2) 三角柱

(3) 直方体

(4) 五角錐