古谷数学教室第 11 回

数列

2024 年 6 月 23 日

1　基礎事項

ここでは、断りがない限り n は自然数とする。

1.1　数列と一般項

一般に、数を一列に並べたものを**数列**といい[1]、数列における各数を**項**という。数列の項は、最初の項から順に第 1 項、第 2 項、第 3 項、$\cdots$ といい、n 番目の項を第 n 項という。とくに、第 1 項を**初項**という。

数列を一般的に表すには、次のように書く：

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots, a_n,\ \cdots$$

この数列を $\{a_n\}$ と略記することもある。例えば、数列 $\{n^2\}$ は、次のように書く：

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \cdots.$$

数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n が n の式で表されるとき、n に 1、2、3、$\cdots$ を順に代入すると、数列 $\{a_n\}$ の初項、第 2 項、第 3 項、$\cdots$ が得られる。このような a_n を数列 $\{a_n\}$ の**一般項**という。

1.2　等差数列

一般に、初項に一定の数 d を次々と足して得られる数列を**等差数列**といい、その一定の数 d を**公差**という。初項 a、公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は、次の式で表される：

等差数列の一般項

$$a_n = a + (n-1)d.$$

1）　項の個数が有限である数列を**有限数列**、無限である数列を**無限数列**ということがある。

1.3　等差数列の和

初項 a、公差 d の等差数列において、第 n 項が l のとき、初項から第 n 項までの和を S_n で表すと、次の式で表される：

等差数列の和

$$S_n = \frac{1}{2}n(a+l),$$
$$S_n = \frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}.$$

項の個数が有限である数列では、その項の個数を**項数**といい、最後の項を**末項**（まっこう）という。

1.4　等比数列

初項に一定の数 r を次々と掛けて得られる数列を**等比数列**といい、その一定の数 r を**公比**という。初項 a、公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は、次の式で表される：

等比数列の一般項

$$a_n = ar^{n-1}.$$

1.5　等比数列の和

初項 a、公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は次の式で表される：

等比数列の和

$$S_n = \begin{cases} \frac{a(1-r^n)}{1-r} & r \neq 1\text{のとき} \\ na & r = 1\text{のとき} \end{cases}.$$

1.6　和の記号

数列 $\{a_n\}$ について、初項から第 n までの和を、第 k 項の a_k と和の記号 Σ を用いて $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ と書く：

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

自然数の和について、次が成り立つ[2)]：

自然数に関する和の公式

$$\sum_{k=1}^{n} c = nc,$$
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1),$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

また、次の性質が成り立つ：

Σ の性質

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k,$$
$$\sum_{k=1}^{n} pa_k = p\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

1.7　階差数列

一般に、数列 $\{a_n\}$ の隣り合う 2 項の差

$$a_{n+1} - a_n = b_n$$

を項とする数列 $\{b_n\}$ を、数列 $\{a_n\}$ の**階差数列**という。

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると、次のことがいえる：

階差数列と一般項

$n \geq 2$ のとき、

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k,$$

$n = 1$ のとき、

$$a_n = a_1.$$

2)　この公式を丸暗記しているけど、$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1} k$ などの計算ができない学生さんを観測することがある。

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とすると、次のことがいえる：

数列の和と一般項

$n \geq 2$ のとき、

$$a_n = S_n - S_{n-1}.$$

$n = 1$ のとき、

$$a_1 = S_1.$$

2　演習問題

ここでは、断りがない限り、n は自然数とする。

1. 次の等差数列について、[　] に指定されたものを求めよ。

(1) 公差 3、第 7 項 10　[初項]

(2) 初項 100、第 6 項 65　[公差]

2. 次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 第 5 項が 10、第 10 項が 20

(2) 第 10 項が 100、第 100 項が 10

3. 次の数列が等差数列であるとき、k の値を求めよ：

$$4,\ k,\ 6k.$$

4. 次のような等差数列の和を求めよ。

(1) 初項 3、末項 21、項数 10

(2) 初項 50、公差 -2、項数 26

5. 初項 2、公差 2 の等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。S_n および、S_{10} を求めよ。

6. 次の等差数列の初項から第 n 項までの和を求めよ：

$$4,\ 1,\ -2,\ \cdots.$$

7. 次の等差数列の和を求めよ：

$$85,\ 78,\ 71,\ \cdots, 43.$$

8. 第 5 項が 12、初稿から第 5 項までの和が 20 の等差数列の初項と公差を求めよ。

9. 30 から 100 までの自然数のうち、次のような数の和を求めよ。

(1) 20 の倍数

(2) 5 で割り切れない数

10. 次の等比数列について、[ ] に指定されたものを求めよ。

(1) 初項 5、公比 2 [第 8 項]

(2) 公比 -2、第 6 項 160 [初項]

(3) 初項 2、第 4 項 54 [公比（実数）]

11. 次の等比数列 $\{a_n\}$ の初項と公比を求めよ。また、一般項を求めよ。ただし、公比は実数とする。

(1) 第 3 項が 36、第 6 項が 972

(2) 第 3 項が 12、第 7 項が 192

12. 次の数列が等比数列であるとき、k の値を求めよ。

(1) $4,\ k,\ k-1$

(2) $k,\ 6,\ k+5$

13. 初項 4、公比 2 の等比数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。S_n および S_{10} を求めよ。

14. 初項 1、公比 2、末項 64 の等比数列の和を求めよ。

15. 次の等比数列の初項から第 n 項までの和を求めよ：

$$-1,\ 2,\ -4,\ \cdots.$$

16. 次の和を、Σ を用いないで、各項を書き並べて表せ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=5}^{10} 2^k$

(2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{5} (k+2)^2$

17. 次の数列の和を記号 Σ を用いて表せ：

$$1,\ 4,\ 9,\ \cdots,\ 64.$$

18. 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2\cdot 3^{k-1}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=4}^{9} k^2$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-7)$

19. 次の数列の第 k 項、および初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) $1\cdot 1,\ 2\cdot 3,\ 3\cdot 5,\ 4\cdot 7,\ \cdots$

(2) $1^3,\ 3^3,\ 5^3,\ 7^3, \cdots$

20. 次の数列について、階差数列 $\{b_n\}$ の一般項と与えられた数列の一般項を求めよ。

(1) $1,\ 2,\ 6,\ 15,\ 31,\ \cdots$

(2) $1,\ 2,\ 5,\ 14,\ 41,\ \cdots$

21. 初項から第 n 項までの和が次の式で表される数列の一般項を求めよ。

(1) $n^3 + 2$

(2) $2^n + 3$