古谷数学教室第 12 回

数列

2024 年 6 月 30 日

1　基礎事項

ここでは、断りがない限り n は自然数とする。

1.1　漸化式

数列では、初項と隣り合う 2 項間の関係がわかれば、すべての項が定まる。例えば、

$$a_1 = 3, \tag{1}$$

$$a_{n+1} = 2a_n \tag{2}$$

の式 (2) のように、数列において前の項から次の項[1] を決めるための関係式を**漸化式**（ぜんかしき）という。

等差数列 $\{a_n\}$ の漸化式は

$$a_{n+1} = a_n + d$$

である。ここで、d は公差を意味する。

等比数列 $\{a_n\}$ の漸化式は

$$a_{n+1} = ra_n$$

である。ここで、r は等比を意味する。

漸化式が $a_{n+1} = a_n + f(n)$ の形の場合は、階差数列を利用する方法で、一般項が求められる。

1.2　数学的帰納法

自然数は限りなくあるから、この事実をすべての n について確かめる[2] ことはできない。だが、**数学的帰納法**と呼ばれる「自然数 n を含む等式や不等式などがすべての自然数 n について成り立つ」と結論する次の証明方法がある：

1)　前の項と次の項とは、例えば a_k が前の項、a_{k+1} が次の項である。
2)　ここでいう確かめるとは、$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ とすべての自然数を等式に代入して調べるということを意味する。

数学的帰納法

1. $n=k$ のとき、n についての等式、不等式が成り立つと仮定すると、$n=k+1$ のときもその等式、不等式が成り立つ。

2. $n=1$ のとき、その等式、不等式が成り立つ。

2　演習問題

ここでは、断りがない限り、n は自然数とする。

1. 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の第 2 項から第 5 項を求めよ。

(1) $a_1=3,\ a_{n+1}-a_n=2$

(2) $a_1=1,\ a_{n+1}=-5a_n$

2. 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=4n$

(2) $a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=4^n$

3. 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n-2$

(2) $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+2$

4. 数学的帰納法によって、次の等式を証明せよ：

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1).$$