古谷数学教室第 13 回

指数関数と対数関数

2024 年 7 月 7 日

1　基礎事項

1.1　指数の拡張

　この小節では、m、n は正の整数、k、l は整数、a、b は実数、c、d は 0 でない実数、α、β は正の実数、r を正の有理数、p、q を有理数であるとする。

　次の指数法則が成り立つことは、すでに学んでいる：

$$
\begin{aligned}
a^m \times a^n &= a^{m+n},\\
(a^m)^n &= a^{mn},\\
(ab)^n &= a^n b^n.
\end{aligned}
$$

ここで、この法則が成り立つように指数が 0 や負の整数である場合の累乗[1)]の意味を定め、累乗の指数の範囲を整数全体に拡張する。すなわち、次の式を定める：

$$
\begin{aligned}
c^0 &= 1,\\
c^{-n} &= \frac{1}{c^n}.
\end{aligned}
$$

　一般に、指数が整数の場合に、次の指数法則が成り立つ：

1）　a^1、a^2、a^3、a^4、$\cdots$ を総称して a の**累乗**と呼んでいた。「a をいくつかかけたものが a の累乗」と中学生的な理解をしていたら、a^0 や a^{-2} の意味が不明になる点に注意する。

指数法則（指数が整数）

$$c^k \times c^l = c^{k+l},$$
$$\frac{c^k}{c^l} = c^{k-l},$$
$$(c^k)^l = c^{kl},$$
$$(cd)^k = c^k d^k.$$

n 乗して a になる数を a の n 乗根という。すなわち、方程式 $x^n = a$ の解が a の n 乗根である。また、a の 2 乗根（平方根)、3 乗根、4 乗根、$\cdots$ を総称して a の**累乗根**という。

以下では、α の n 乗根のうち、正であるもの、すなわち α の正の n 乗根について考える。関数 $y = x^n$ $(x \geq 0)$ のグラフを描くことにより、$x^n = \alpha$ を満たす正の数 x がただ 1 つであることがわかる。この数 x を $\sqrt[n]{\alpha}$ で表す。

$\sqrt[n]{\alpha}$ の定義から、累乗根について、次の性質が得られる：

累乗根の性質

$$\sqrt[n]{\alpha}\,\sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha\beta},$$
$$\frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}} = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}},$$
$$(\sqrt[n]{\alpha})^m = \sqrt[n]{\alpha^m},$$
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\alpha}} = \sqrt[mn]{\alpha}.$$

指数が有理数の場合の累乗の意味を、次のように定める：

$$\alpha^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\alpha},$$
$$\alpha^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\alpha^m},$$
$$\alpha^{-r} = \frac{1}{a^r}.$$

これより、指数が有理数の場合にも、次の指数法則が成り立つ：

指数法則（指数が有理数）

$$\alpha^p \times \alpha^q = \alpha^{p+q},$$
$$\frac{\alpha^p}{\alpha^q} = \alpha^{p-q},$$
$$(\alpha^p)^q = \alpha^{pq},$$
$$(\alpha + \beta)^p = \alpha^p \beta^p.$$

α^x の指数 x は実数まで拡張することができる。例えば、$\sqrt{2} = 1.4142\cdots$ に対して、累乗の数列

$$\alpha^{1.4},\ \alpha^{1.41},\ \alpha^{1.414},\ \alpha^{1.4142},\ \cdots$$

は、次第に一定の値に近づく。その値を $\alpha^{\sqrt{2}}$ と定めるのである。すなわち、次の指数法則が成り立つ：

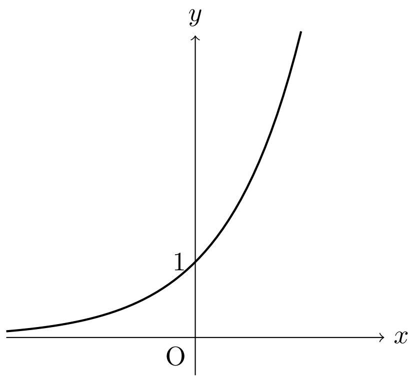
指数法則（指数が実数）

$$\alpha^a \times \alpha^b = \alpha^{a+b},$$
$$\frac{\alpha^a}{\alpha^b} = \alpha^{a-b},$$
$$(\alpha^a)^b = \alpha^{ab},$$
$$(\alpha + \beta)^a = \alpha^a \beta^a.$$

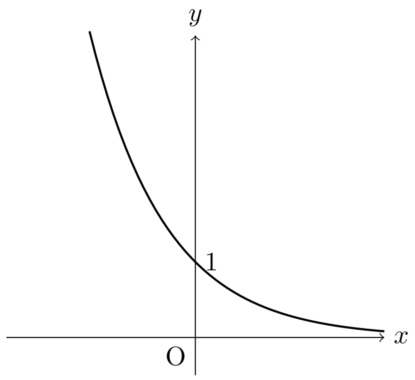
1.2　指数関数

この小節では、a を 1 と異なる正の定数とする。

$y = a^x$ は x の関数である。この関数を、a を**底**とする x の**指数関数**という。一般に、指数関数 $y = a^x$ のグラフは、次の図のようになる。



$a > 1$ のとき



$0 < a < 1$ のとき

いずれの場合も、x 軸を漸近線としてもち、点 $(0,\ 1)$、$(1,\ a)$ を通る。

x の値が増加すると y の値も増加する関数を**増加関数**といい、x の値が増加すると y の値は減少する関数を**減少関数**という。

r、s を実数とする。指数関数 $y = a^x$ は、次のような特徴をもつ：

指数関数の特徴

1. 定義域は実数全体、値域は正の数全体である。

2. $a > 1$ のとき、増加関数である：

$$r < s \Longleftrightarrow a^r < a^s.$$

3. $0 < a < 1$ のとき、減少関数である：

$$r < s \Longleftrightarrow a^r > a^s.$$

4. 次が成り立つ：

$$r = s \Longleftrightarrow a^r = a^s.$$

1.3　対数とその性質

指数関数 $y = 2^x$ は増加関数で、値域は正の数全体であるから、どんな正の数 M に対しても、$M = 2^x$ となる実数 x がただ 1 つに定まる。この x を $\log_2 M$ で表す。

一般に、指数関数 $y = a^x$ を考えれば、どんな正の数 M に対しても $M = a^p$ となる実数 p がただ 1 つ定まる。この p を $\log_a M$ で表し、a を**底**とする M の対数という。また、$\log_a M$ における正の数 M を、この対数の**真数**という。

$a > 0,\ a \neq 1$ で $M > 0$ とする。指数と対数の関係は、次のようになる：

指数と対数

$$M = a^p \Longleftrightarrow \log_a M = p.$$

$M = a^p$ のとき、$\log_a M = p$ であるから、次の等式が得られる：

$$\log_a a^p = p.$$

a を底とする対数の性質を調べてみる。まず、$1 = a^0$、$a = a^1$ であることから、次が成り立つ：

$$\log_a 1 = 0,$$
$$\log_a a = 1.$$

$M > 0$、$N > 0$ で、k は実数とする。指数法則から、次の性質が得られる：

対数の性質

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N,$$
$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N,$$
$$\log_a M^k = k \log_a M.$$

a、b、c は正の数で、$a \neq 1$、$c \neq 1$ であるとする。a を底とする対数 $\log_a b$ を、c を底とする対数で表す、**底の変換公式**と呼ばれるものがある：

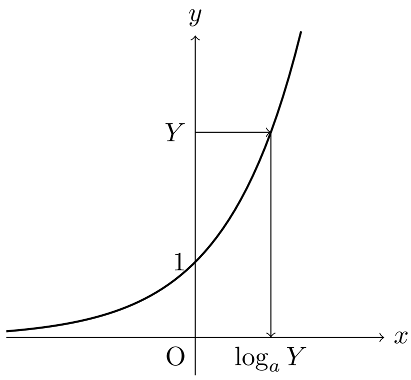
底の変換公式

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

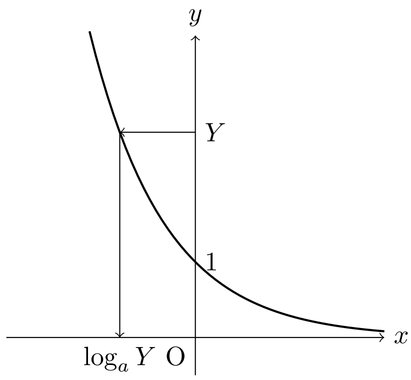
1.4　対数関数

a を 1 と異なる正の定数とするとき、$y = \log_a x$ は x の関数である。この関数を、a を底とする x の**対数関数**という。

一般に、対数関数 $y = log_a x$ のグラフは、指数関数 $y = a^x$ のグラフと直線 $y = x$ に関して対称であり、次の図のようになる。



$a > 1$ のとき



$0 < a < 1$ のとき

いずれの場合も、y 軸を漸近線としてもち、点 $(1,\ 0)$、$(a,\ 1)$ を通る。

p、q を実数とする。対数関数 $y = \log_a x$ は、次のような特徴をもつ：

対数関数の特徴

1. 定義域は正の数全体、値域は実数全体である。

2. $a > 0$ のとき、増加関数である：

$$0 < p < q \iff \log_a p < \log_a q.$$

3. $0 < a < 1$ のとき、減少関数である：

$$0 < p < q \iff \log_a p > \log_a q.$$

4. $p > 0$、$q > 0$ のとき、次が成り立つ：

$$p = q \iff \log_a p = \log_a q.$$

1.5　常用対数

正の数 M は、次の形で表すことができる：

$$M = a \times 10^n,$$

ただし、n は整数で、$1 \leq a < 10$ とする。このとき、$\log_{10} M$ は、次のように整数 n と $\log_{10} a$ の和で表される：

$$\log_{10} M = \log_{10} a + \log_{10} 10^n = \log_{10} + n.$$

10 を低とする対数を**常用対数**という。

一般に、自然数 N、k について、次のことが成り立つ：

$$「N \text{ が } k \text{ 桁の数}」 \Longleftrightarrow k - 1 \leq \log_{10} N < k.$$

また、$0 < M < 1$ である小数 M と自然数 k について、次のことが成り立つ：

$$「M \text{ の小数第 } k \text{ 位に初めて } 0 \text{ でない数字が現れる}」 \Longleftrightarrow -k \leq \log_{10} M < -k + 1.$$

2　演習問題

1. 次の式を計算せよ。ただし、$a \neq 0$、$b \neq 0$ とする。

(1) 4^{-2}

(2) $(-3)^{-5}$

(3) $a^7 a^{-3}$

(4) $(a^{-4})^{-2}$

(5) $(a^2 b^{-3})^{-4}$

(6) $a^3 \div a^6$

(7) $a^4 \div a^{-2}$

(8) $a^{-3} \div a^{-3}$

(9) $(5^2 \times 3^{-1})^3 \times (5^{-3})^2$

(10) $\sqrt[4]{256}$

(11) $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{54}$

(12) $\dfrac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}}$

(13) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$

2. 次の値を求めよ。ただし、(2)、(4) は実数の範囲で答えよ。

(1) $\sqrt[3]{216}$

(2) 216 の 3 乗根

(3) $\sqrt[4]{10000}$

(4) 10000 の 4 乗根

3. 次の関数のグラフをかけ。また、(2) から (4) のグラフと (1) のグラフの位置関係を答えよ。

(1) $y = 4^x$

(2) $y = 4^{-x}$

(3) $y = -\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$

(4) $y = 4 \cdot 4^x$

4. 関数 $y = -3^x$ $(0 \leq x \leq 2)$ の値域を求めよ。

5. 次の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $2^{-3},\ 2^0,\ 2^4$

(2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3},\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^0,\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^4$

(3) $\sqrt[4]{8},\ \sqrt[6]{32},\ \sqrt[9]{128}$

6. 次の方程式、不等式を解け。

(1) $2^x = 64$

(2) $2^{2x+1} = 32$

(3) $\left(\frac{1}{9}\right)^x \leq \frac{1}{81}$

(4) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \leq 2^{x+2}$

7. 次の関係を、(1) は $p = \log_a M$、(2) は $a^p = M$ の形に表せ。

(1) $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

(2) $\log_{10} 1000 = 3$

8. 次の対数の値を求めよ。

(1) $\log_4 4$

(2) $\log_7 49$

(3) $\log_{\sqrt{3}} 1$

(4) $\log_{\frac{1}{3}} 9$

(5) $\log_2 \sqrt[3]{32}$

(6) $\log_{\sqrt{3}} 3$

9. 次の式を簡単にせよ。

(1) $\log_6 4 + \log_6 9$

(2) $\log_2 2\sqrt{6} - \log_2 \sqrt{3}$

(3) $2\log_2 \sqrt{2} - \frac{1}{2}\log_2 3 + \log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $\log_4 32$

(5) $\log_3 5 \cdot \log_5 27$

10. 次の関数のグラフをかけ。また、(2) から (3) のグラフと、(1) のグラフの位置関係を答えよ。

(1) $y = \log_4 x$

(2) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$

(3) $y = \log_4(-x)$

11. 関数 $y = \log_2(x+1) \quad (0 \leq x \leq 3)$ の値域を求めよ。

12. 次の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $\log_2 3,\ \log_2 5$

(2) $\log_{0.3} 3,\ \log_{0.3} 5$

13. 次の方程式、不等式を解け。

(1) $\log_3 x = 3$

(2) $\log_{16}(x-2) = 0.5$

(3) $\log_5 x < 3$

(4) $\log_{\frac{1}{3}} x \geq 2$

14. 次の値を求めよ。

(1) $\log_{10} 100000$

(2) $\log_{10} 0.000001$

15. $\log_{10} 4.56 = 0.6590$ として、次の値を求めよ。

(1) $\log_{10} 45600$

(2) $\log_{10} 0.000456$

16. 常用対数表を用いて[2]、次の常用対数を求めよ。

(1) 38700

(2) 0.0458

17. 常用対数表を用いて、常用対数が次の数となる真数を求めよ。

(1) 2.9845

(2) -1.1175

18. $\log_{10} 2 = 0.3010$、$\log_{10} 3 = 0.4771$ として、次の値を求めよ。

(1) $\log_{10} 24$

(2) $\log_{10} 15$

(3) $\log_4 9$

19. 次の空欄を、最も適当な正の整数で埋めよ。

(1) 正の数 N が 5 桁の整数のとき、$10^{\boxed{\text{ア}}} \leq N < 10^{\boxed{\text{イ}}}$、$\boxed{\text{ウ}} \leq \log_{10} N < \boxed{\text{エ}}$

(2) 正の数 N が小数第 3 位に初めて 0 でない数字が現れる小数であるとき、$10^{-\boxed{\text{オ}}} \leq N < 10^{\boxed{\text{カ}}}$、$-\boxed{\text{キ}} \leq \log_{10} N < -\boxed{\text{ク}}$

20. $\log_{10} 2 = 0.3010$、$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。(1) の値は何桁の数か答えよ。また、(2) の値は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか答えよ。

2） 教科書や参考書などで、自分で常用対数表を用意すること。三角比の表のときも同様のコメントを授業中にしたはずだが、あまり伝わっていなかったので、ここでコメントしておく。

(1) 6^{40}

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$