

古谷数学教室第 14 回

微分法と積分法

2024 年 7 月 14 日

1 基礎事項

1.1 微分係数

関数 $y = f(x)$ において、 x の値が a から b まで変化するとき、

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を $x = a$ から $x = b$ までの、 $f(x)$ の平均変化率という。

例えば、 $2 + h$ の h を、0 の両側から 0 に限りなく近づけてみる：

$$2.1, 2.01, 2.001, \dots$$

または

$$1.9, 1.99, 1.999, \dots$$

このことを、 h が 0 に限りなく近づくと、 $2 + h$ の極限值は 2 であるといい、次のように書く：

$$\lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) = 2.$$

関数 $f(x)$ の、 $x = a$ から $x = a + h$ までの平均変化率

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{a + h - a}$$

において、 h が 0 に限りなく近づくと、この平均変化率が一定の値に限りなく近づくなれば、その極限值を関数 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数またはといい、 $f'(a)$ で表す：

微分係数

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

関数 $f(x)$ が微分係数 $f'(a)$ をもつとする。関数 $y = f(x)$ のグラフ上に 2 点 $A(a, f(a))$ 、 $P(a+h, f(a+h))$ をとると、直線 AP の傾き

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

は関数 $f(x)$ の $x = a$ から $x = a+h$ までの平均変化率に等しい。 h が 0 に限りなく近づくとき、点 P は点 A に限りなく近づくから、直線 AP は点 A を通り傾きが $f'(a)$ の直線 l に限りなく近づく。この直線 l を、関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 A における**接線**といい、 A を**接点**という。また、直線 l はこの曲線に点 A で**接する**という。

以上をまとめると、次のことがいえる：

接線の傾きと微分係数

関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $A(a, f(a))$ における接線の傾きは、関数 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ に等しい。

1.2 導関数とその計算

一般に、関数 $f(x)$ において、 x のとる各値 a に対して微分係数 $f'(a)$ を対応させると、 x の関数が得られる。このようにして得られる新しい関数 $f'(x)$ の**導関数**といい、 $f'(x)$ で表す。

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は、次の式で求められる：

導関数

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

関数 $y = f(x)$ の導関数を、 y' や $\frac{dy}{dx}$ などで表すこともある。

たとえば、 x の関数 $y = x^3$ を、「関数 x^3 」のように、単に x の式だけで表記することもある。このときは、関数 x^3 の導関数を $(x^3)'$ で表す。

一般に、次の公式が成り立つ：

関数 x^n と定数関数の導関数

$$(x^n)' = nx^{n-1},$$

$$(c)' = 0,$$

ただし、 n は正の整数である。

関数 $f(x)$ から導関数 $f'(x)$ を求めることを、 $f(x)$ を x で微分する、または単に微分するという。

k を定数とする。一般に、次の性質が成り立つ：

関数の定数倍および和、差の導関数

$$y = kf(x) \text{ を微分すると } y' = kf'(x),$$
$$y = f(x) \pm g(x) \text{ を微分すると } y' = f'(x) \pm g'(x).$$

1.3 接線の方程式

一般に、次のことがいえる：

グラフ上の点における接線の方程式

関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

1.4 関数の増減と極大・極小

一般に、関数 $f(x)$ の増減と導関数 $f'(x)$ の符号の関係は、次のようになる：

$f(x)$ の増減と $f'(x)$ の符号

$f(x)$ は、 $f'(x) > 0$ となる x の値の範囲では増加し、 $f'(x) < 0$ となる x の値の範囲では減少する。

一般に、関数 $f(x)$ が $x = a$ を境目として増加から減少に移るとき、 $f(x)$ は $x = a$ で**極大**であるといい、 $f(a)$ を**極大値**という。

また、 $x = b$ で**極小**であるといい、 $f(b)$ を**極小値**という。

極大値と極小値をまとめて**極値**という。関数が常に増加または常に減少する範囲では、増減が入れかわることはないから、関数は極値をもたない。

x の整式で表される関数 $f(x)$ について、次のことがいえる：

関数 $f(x)$ が $x = a$ で極値をとるならば、 $f'(a) = 0$ である。

ただし、逆成り立たない。

2 演習問題

1. 次の極限值を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x)$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 2h}{h}$$

2. 定義にしたがって、関数 $f(x) = 4x^2$ の $x = 2$ おける微分係数を求めよ。

3. 曲線 $y = x^2 + 3x$ 上の点 $(0, 0)$ における曲線の接線の傾きを求めよ。

4. 次の関数を微分せよ。

$$(1) y = -2$$

$$(2) y = -3x^2 + 6x - 5$$

$$(3) y = 2x^3 - 5x + 3$$

$$(4) y = (3x - 1)(x^2 + 1)$$

$$(5) y = 2x^4 - 6x^3 + 3x - 1$$

$$(6) y = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$$

5. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ について、次の値を求めよ。

$$(1) f'(0)$$

$$(2) f'(-1)$$

6. 半径 r の円の面積 S を r の関数と考え、 r で微分せよ。

7. 次の曲線上の点における、曲線の接線の方程式を求めよ。

(1) $y = x^2 - 3x + 2$ (1, 0)

(2) $y = 2x^3 + 5x^2$ (-1, 3)

8. 次の関数の増減を調べよ。

(1) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$

(2) $y = x^3 + x$

9. 次の関数の極値を求めよ。また、そのグラフをかけ。

(1) $y = -x^3 + 3x$

(2) $y = \frac{1}{9}x^3 - x^2 + 3x$

10. 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1) $y = x^3 - 12x$ ($-3 \leq x \leq 3$)

(2) $y = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x$ ($-\frac{1}{2} < x < 3$)

11. 次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1) $x^3 + 6x^2 - 6 = 0$

(2) $x^3 - 8x^2 + 16x = 0$