古谷数学教室第 15 回

微分法と積分法

2024 年 7 月 21 日

1　基礎事項

1.1　不定積分

x で微分すると $f(x)$ になる関数を、$f(x)$ の**原始関数**という。すなわち、$F'(x) = f(x)$ のとき、$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数である。

たとえば、$2x$ の原始関数は、x^2、x^2+10、x^2-2 など、いくつもあるが、それらの違いは x を含まない定数部分だけである。

一般に、関数 $f(x)$ の 1 つの原始関数 $F(x)$ がわかれば、$f(x)$ の任意の原始関数は、$F(x)$ + 定数の形に表される。この定数を**積分定数**という。

以下、このプリントでは、積分定数を C で表し、$f(x)$ の任意の原始関数を $F(x)+C$ で表すことにする。この表示を、$f(x)$ の**不定積分**といい、次のように表す：

不定積分

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

関数 $f(x)$ の不定積分を求めることを、$f(x)$ を**積分する**という。

n は 0 または正の整数であるとする。一般に、次の公式が成り立つ：

x^n の不定積分

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C.$$

$G'(x) = g(x)$ とし[1]、k は定数とする。関数の定数倍および和、差の不定積分について、次のことがいえる：

1）　$F'(x) = f(x)$ はすでに断った。（断ったとは、もう述べたという意味で用いている。）

関数の定数倍および和、差の不定積分

$$\int kf(x)dx = kF(x) + C,$$
$$\int \{f(x) \pm g(x)\}dx = F(x) \pm G(x) + C.$$

変数が x でない関数についても、x の場合と同様に不定積分を考える。たとえば、次の具合である：

$$\int udu = \frac{1}{2}u^2 + C.$$

1.2　定積分

一般に、関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とし、a、b を $f(x)$ の定義域内の任意の値とするとき、$F(a) - F(b)$ の値は $F(x)$ の選び方とは関係なく、a、b の値だけで定まる。例えば、関数 $f(x) = 2x$ の原始関数 $F(x)$ は、

$$F(x) = x^2 + C$$

であるが、$F(3) - F(1)$ を計算すると、

$$F(3) - F(1) = 8$$

が得られ、定数 C の値を含まない。この $F(a) - F(b)$ を

$$\int_a^b f(x)dx$$

と書き、これを関数 $f(x)$ の a から b までの**定積分**という。このとき、a を**下端**（かたん）、b を**上端**（じょうたん）という。a と b の大小関係は問わない。また、$F(b) - F(a)$ を、

$$\Big[F(x)\Big]_a^b$$

とも書く。

以上をまとめると、次のようになる：

定積分

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

k は定数とする。不定積分のときと同様に、次のことがいえる：

関数の定数倍および和、差の定積分

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx,$$
$$\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

定積分の上端、下端に関する性質として、次のことが成り立つ：

定積分の性質

$$\int_a^a f(x)dx = 0,$$
$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx,$$
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

関数 $f(t)$ に対して、$F'(t) = f(t)$ とする。t を変数とする関数の定積分は、次のようになる：

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

すなわち、次の等式が成り立つ：

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx.$$

したがって、変数を表す文字が違うだけの定積分の値は等しくなる。$f(t)$ の定積分

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

は x の関数である。右辺の関数を x で微分すると、次の式を得る[2]：

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

1.3 定積分と図形の面積

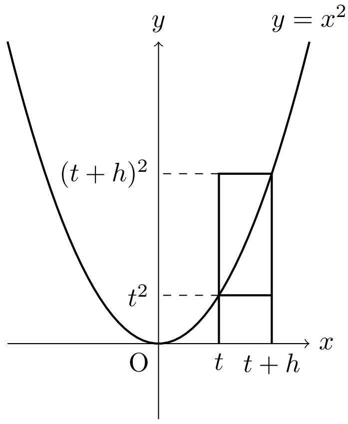
関数 $y = x^2$ のグラフと x 軸および直線 $x = t$ で囲まれた図形の面積を $S(t)$ を考える。h を 0 でない数とする。4 点 $(t,\ 0)$、$(t,\ t^2)$、$(t+h,\ 0)$、$(t+h,\ t^2)$ の四角形の面積と、4 点 $(t,\ 0)$、

2) $\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$ を意味し、$F(x)$ の導関数を表す。

$\bigl(t,\ (t+h)^2\bigr)$、$\bigl(t+h,\ (t+h)^2\bigr)$、$(t+h,\ 0)$ の四角形の面積と、関数 $y=x^2$ と $x=t$ と $x=t+h$ と x 軸で囲まれた図形の面積の大小関係は、

$$ht^2 < S(t+h) - S(t) < h(t+h)^2$$

となる。



これより、$h>0$ のときは、

$$t^2 < \frac{S(t+h)-S(t)}{h} < (t+h)^2$$

となり、h を限りなく 0 に近づけると、$(t+h)^2$ は限りなく t^2 に近づくので、

$$t^2 < \lim_{h\to 0} \frac{S(t+h)-S(t)}{h} < t^2$$

となる。$h<0$ でも同様である。よって、

$$S'(t) = t^2$$

となる。

一般に、関数 $y=f(x)$ について、次のことが成り立つ：

定積分と図形の面積 (1)

$a \leq x \leq b$ の範囲で、$f(x) \geq 0$ のとき、$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$、$x=b$ で囲まれた図形の面積 S は、

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

次のことも成り立つ；

定積分と図形の面積 (2)

$a \leq x \leq b$ の範囲で、$f(x) \leq 0$ のとき、$y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$、$x = b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_a^b -f(x)dx.$$

以上のことをふまえると、次のことも成り立つことがわかる：

定積分と図形の面積 (3)

$a \leq x \leq b$ の範囲で、$f(x) \leq g(x)$ のとき、$y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$、$x = b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_a^b f(x) - g(x)dx.$$

2　演習問題

1. 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (2x - 5)dx$

(2) $\displaystyle\int (4x^3 - 3x^2 + 1)dx$

(3) $\displaystyle\int (t - 1)(t + 2)dx$

(4) $\displaystyle\int (x + 1)^3 dx$

2. 曲線 $y = f(x)$ が、点 $(1,\ 3)$ を通り、曲線上の各点 $(x,\ y)$ における接線の傾きは $6x^2 + 2x + 3$ であるとき、曲線 $y = f(x)$ を求めよ。

3. 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 (3x^2 + 2x - 1)dx$

(2) $\displaystyle\int_2^4 (x - 1)(x - 2)dx$

(3) $\int_0^3 (t^2 - 3t + 5)dt$

(4) $\int_2^5 (5y^2 + 2y - 1)dy$

(5) $\int_3^0 (x^2 - 4x)dx$

(6) $\int_1^5 (x^2 + 4x)dx + \int_5^1 (x^2 + 4x)dx$

(7) $\int_0^2 (x^2 + 1)dx \int_2^3 (x^2 + 1)dx$

(8) $\int_{-1}^2 (x^2 - x)dx - \int_0^2 (x^2 - x)dx + \int_{-1}^0 (2x - 1)dx$

4. 次の x の関数を微分せよ：

$$\int_1^x (3t^2 - 4t + 1)dt.$$

5. 次の等式を満たす関数 $f(x)$、および定数 a の値を求めよ。

(1) $\int_a^x f(t)dt = x^2 + 2x - 3$

(2) $\int_1^x f(t)dt = 2x^2 + x + a$

6. 次の曲線と 2 直線、および x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1) $y = -x^2 + 2x - 2$、$x = 0$、$x = 2$

(2) $y = x^3 + x$、$x = 1$、$x = 3$

7. 放物線 $y = x^2 - 4x + 1$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

8. 次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1) $y = x^2 - 3x + 5$、$y = 2x - 1$

(2) $y = x^2 - 3x - 2$、$y = -x^2 + x - 2$

9. 曲線 $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ。

10. 次の定積分を求めよ：

$$\int_0^5 |x-2|dx.$$