

古谷数学教室第 17 回

整数の性質

2024 年 8 月 18 日

1 基礎事項

1.1 ユークリッドの互除法

素因数分解をせずに、比較的簡単¹⁾に最大公約数を求める方法として、次の定理を用いる方法がある：

定理

自然数 a 、 b について、 a を b で割ったときの余りを r とすると、 a と b の最大公約数は、 b と r の最大公約数に等しい。

この定理を用いて、最大公約数を求める方法を、**ユークリッドの互除法**または単に**互除法**という。

例えば、506 と 437 の最大公約数を考える。506 = 437 · 1 + 69 かつ 437 = 69 · 6 + 23 から、506 と 437 の最大公約数と 437 と 69 の最大公約数が等しい。さらに、437 と 69 の最大公約数と 69 と 23 の最大公約数は等しい。以上から、23 が、506 と 437 の最大公約数であることがわかる。

互除法の計算を利用すると、2つの整数 a 、 b の最大公約数を、 a と b の式で表すことができる。特に、 a と b が互いに素であるとき、 $ap + bq = 1$ を満たす整数 p 、 q が存在する。両辺に整数 c を掛けると、 $a(cp) + b(cq) = c$ であるから、次のことがいえる：

定理

2つの整数 a 、 b が互いに素であるとき、整数 c について、 $ax + by = c$ を満たす整数 x 、 y が存在する。

1) ここでは、「比較的簡単」とは何かを答えない。

例えば、等式 $24x + 17y = 1$ を満たす整数 x, y の組を 1 つ求める。

$$24 = 17 \cdot 1 + 7,$$

$$17 = 7 \cdot 2 + 3,$$

$$7 = 3 \cdot 2 + 1$$

から、

$$\begin{aligned} 1 &= 7 - 3 \cdot 2 \\ &= 7 - (17 - 7 \cdot 2) \cdot 2 \\ &= 7 \cdot 5 + 17 \cdot (-2) \\ &= (24 - 17 \cdot 1) \cdot 5 + 17 \cdot (-2) \\ &= 24 \cdot 5 + 17 \cdot (-7) \end{aligned}$$

すなわち、

$$24 \cdot 5 + 17 \cdot (-7) = 1$$

となり、等式 $24x + 17y = 1$ を満たす整数 x, y の組の 1 つは $x = 5, y = -7$ である。

1.2 1 次不定方程式

a, b, c は整数の定数で、 $a \neq 0, b \neq 0$ とする。 x, y の 1 次方程式

$$ax + by = c \tag{1}$$

を成り立たせる整数 x, y の組を、この方程式の**整数解**という。この方程式の整数解を求めることを**1 次不定方程式を解く**という。

一般に、次のことがいえる：2 つの整数 a, b が互いに素であるとき、方程式 $ax + by = 0$ のすべての整数解は、次のように表される：

$$x = bk, \quad y = -ak \quad (k \text{ は整数}).$$

式 (1) のすべての整数解を求めるには、式 (1) を満たす整数解を 1 つ見つけて、上のことを利用すればよい。

1.3 n 進法

千の位が 6、百の位が 7、十の位が 8、一の位が 9 である 4 桁の数は 6789 と書く。この表記の意味は

$$6 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 \tag{2}$$

である。この 6789 は、位取りの基礎を 10 とする表記法で、この表記法を**10 進法**という。

10進法では、位として 10^0 の位、 10^1 の位、 10^2 の位、…を用い、各位の数字を右から左へと順に並べている。各位の数字は、0から9までの整数のいずれかで、10で割った余りの種類と同じである。

同様の考え方で、位取りの基礎を2とする表記法を考えることができる。これを**2進法**という。2進法では、位として 2^0 の位、 2^1 の位、 2^2 の位、…を用いる。各位の数字は0または1である。

例えば、2進法で表された数10011は、10進法では

$$1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

を表す。2進法で表された数10011を、10進法の数と区別するため、 $10011_{(2)}$ と書くことがある。

各位の数字を上位の位から並べて数を表す方法を、**位取り記数法**という。このとき、10進法の場合の10、2進法の場合の2のように、位取りの基礎となる数を**底**という。一般に、底を n として数を表す方法を **n 進法**といい、 n 進法で表された数を **n 進数**という。ただし、 n は2以上の自然数である。 n 進数は、右下に (n) をつけて表すことにするが10進法ではふつう (10) を省略する。

2 演習問題

1. 次の2つの整数の最大公約数を求めよ。

(1) 72、15

(2) 308、105

(3) 2717、1309

2. 次の等式を満たす整数 x 、 y の組を1つ求めよ。

(1) $36x + 25y = 1$

(2) $9x - 13y = 7$

(3) $14x + 16y = 6$

3. 次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1) $7x + 8y = 1$

(2) $3x - 5y = 4$

4. $3142_{(5)}$ を 10 進法で表せ。

5. $248_{(10)}$ を、3 進法で表せ。