古谷数学教室第 19 回

統計的な推測

2024 年 9 月 1 日

1　基礎事項

1.1　確率変数と確率分布

試行の結果によってその値が定まり、各値に対応して確率が定まるような変数を**確率変数**という。

一般に、確率変数 X のとりうる値が $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ であり、それぞれの値をとる確率が $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$ であるとき、次のことが成り立つ：

$$p_1 \geq 0,\ p_2 \geq 0,\ \cdots,\ p_n \geq 0,$$
$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$$

確率変数 X のとりうる値とその値をとる確率との対応関係は、表 1 のように書き表される。

表 1　確率分布表

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

この対応関係を、X の**確率分布**または**分布**といい、確率変数 X はこの分布に**従う**という。

確率変数 X が値 a をとる確率を $P(X = a)$ で表す。X が a 以上 b 以下の値をとる確率を $P(a \leq X \leq b)$ で表す。

1.2　確率変数の期待値と分散

確率変数 X の確率分布が表 1 で与えられているとする。このとき、

$$\sum_{k=1}^{n} x_k p_k$$

を、X の**期待値**または**平均**といい、$E(X)$ または m で表す[1)]。

1)　$E(X)$ の E は、期待値を意味する英語 expectation の頭文字、m は平均を意味する mean の頭文字である。

確率変数 X の確率分布が表 1 で与えられているとする。a、b を定数とするとき、X に対して $aX+b$ も確率変数であり、その分布は表 2 のようになる。 よって、$aX+b$ の期待値は、明らかに

表 2　確率分布表

$aX+b$	ax_1+b	ax_2+b	$\cdots$	ax_n+b	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

次のようになる：

$aX+b$ の期待値

$$E(aX+b)=aE(X)+b.$$

確率変数 X に対して、X^2 もまた確率変数である。このとき、確率変数 X^2 の期待値は、次の式で与えられる：

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k.$$

確率変数 X の確率分布が表 1 で与えられているとする。X の期待値を m とするとき、確率変数 $(X-m)^2$ の期待値

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2 p_k$$

を、X の**分散**といい、$V(X)$ で表す[2)] 。明らかに次のことが成り立つ：

分散と期待値

$$V(X)=E(X^2)-\big\{E(x)\big\}^2.$$

確率変数 X について、X の分散 $V(X)$ の正の平方根 $\sqrt{V(X)}$ を、X の**標準偏差**といい、$\sigma(X)$ で表す[3)] 。

確率変数 X の期待値、分散、標準偏差をそれぞれ X の分布の**平均**、**分散**、**標準偏差**ともいう。

標準偏差 $\sigma(X)$ は、X の分布の平均 m を中心として、X のとる値の散らばる傾向の程度を表している。標準偏差 $\sigma(X)$ の値が小さければ小さいほど、X のとる値は、平均 m の近くに集中する傾向にある。

1.3　確率変数の和と積

2 つの確率変数 X、Y について、一般に、次のことが成り立つ：

2）　$V(X)$ の V は、分散を意味する英語 variance の頭文字である。

3）　$\sigma(X)$ の σ は、標準偏差を意味する英語 standard deviation の頭文字 s に相当するギリシャ文字である。

確率変数の和の期待値

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$

3 つ以上の確率変数の和の期待値についても、2 つの場合と同様なことが成り立つ。

2 つの確率変数 X、Y と定数 a、b について、$aX+bY$ も確率変数であり、次のことが成り立つ：

$$E(aX+bY) = aE(X) + bE(Y).$$

2 つの確率変数 X、Y を考える。X のとる値 a と Y のとる値 b に対して、

$$P(X=a,\ Y=b) = P(X=a) \cdot P(Y=b)$$

が a、b のとり方に関係なく常に成り立つとき、確率変数 X、Y は互いに**独立**であるという。とくに、2 つの試行 S と T が独立のとき、S の結果によって定まる確率変数 X と T の結果によって定まる確率変数 Y は独立である。

2 つの確率変数 X、Y が互いに独立である場合、一般に、確率変数 X、Y について、次のことが成り立つ：

独立な 2 つの確率変数の積の期待値

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

また、次のことも成り立つ：

独立な 2 つの確率変数

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y).$$

3 つ以上の確率変数の独立についても、2 つの場合と同様に定義する。

2　演習問題

1. 3 枚の硬貨を同時に投げるとき、表の出る枚数を X とする。

(1) 確率変数 X の確率分布を求めよ。

(2) $P(2 \leq X \leq 3)$ を求めよ。

2. 下の確率分布に従う変数 X について、次の値を求めよ。

X	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	1

(1) 期待値

(2) 分散

(3) 標準偏差

3. 1 個のさいころを 3 回投げるとき、3 の倍数の目が出た回数 X の期待値、分散、標準偏差を求めよ。

4. 1 個のさいころを投げて出た目を X とするとき、確率変数 $3X-1$ の期待値、分散、標準偏差を求めよ。

5. 確率変数 X の期待値を m、標準偏差を σ とするとき、確率変数 $\dfrac{X-m}{\sigma}$ の期待値と標準偏差を求めよ。

6. 2 枚の硬貨を同時に投げる試行を 2 回行う。1 回目の試行で表の出る枚数を X、2 回目の試行で表の出る枚数を Y とするとき、X と Y の同時分布を求めよ。

7. 次の事象 A、B は独立であるか、従属であるか答えよ。

(1) ジョーカーを除く 1 組 52 枚のトランプから 1 枚抜き出すとき、

$$A: \text{ハートが出る}, \quad B: \text{エースが出る}.$$

(2) 1 から 9 までの 9 個の整数から 1 個の整数を選ぶとき、

$$A: \text{奇数を選ぶ}, \quad B: 5\ \text{以下を選ぶ}.$$

8. 硬貨とさいころを同時に投げるとき、硬貨で表が出たら 1、裏が出たら 0 となる確率変数を X とし、さいころの出た目の数を Y とする。このとき、確率変数 XY の期待値を求めよ。