古谷数学教室第 21 回

複素数平面

2024 年 9 月 29 日

1　基礎事項

1.1　複素数平面

複素数は 2 つの実数 $a,\ b$ と虚数単位 i を用いて

$$a+ib$$

の形で表される。以下、複素数 $a+ib$ と書いた場合、文字 a、b は実数を表すものとする[1)] 。

複素数 $a+ib$ に対して、座標平面上の点 $(a,\ b)$ を対応させると、どんな複素数も座標平面上の点で表すことができる。このように、複素数を点で表す座標平面を**複素数平面**または**複素平面**という[2)] 。

複素平面を考える場合、x 軸を**実軸**、y 軸を**虚軸**という[3)] 。実軸上の点は実数を表し、虚軸上の原点 O 以外の点は純虚数[4)] を表す。

複素平面上で複素数 z を表す点 P を $\mathrm{P}(z)$ と書く。また、この点を点 z ということがある。たとえば、点 0 とは原点 O のことである。

複素数 z と共役な複素数を $\bar{z}$ で表す[5)] $\bar{z}$ を z の**共役複素数**ともいう。

複素平面上で、z、$\bar{z}$、$-z$ を表す点を図示すると、次のことがいえる：

点 z と点 $\bar{z}$ は実軸に関して対称である。

点 z と点 $-z$ は原点に対して対称である。

$\bar{z}$ の共役複素数は z である。すなわち、$\bar{\bar{z}}=z$ である。

1)　$c+id$ なども同様である。
2)　ガウス平面と呼ぶことがある。
3)　x 軸が実軸で、y 軸が虚軸である必要はない（y 軸を実軸、x 軸を虚軸に見ても問題はない）が、高校数学では、y 軸が虚軸という縛りがある。私はこの縛りが嫌いである。
4)　複素数 $a+ib$ に対して、$b\neq 0$ かつ $a=0$ のとき、この複素数を純虚数という。
5)　すなわち、$z=a+ib$ に対し、$\bar{z}=a-ib$ である。

複素数平面上の 2 点 A(α)、B(β) 間の距離は、座標平面上の場合と同様に線分 AB の長さと考える。

原点 O と点 P(z) との距離を、複素数 z の**絶対値**といい、$|z|$ で表す。

$z=a+ib$ のとき、$\mathrm{OP}=\sqrt{a^2+b^2}$ であるから、次のことがいえる：

複素数の絶対値

$$|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

複素数の和、差を複素数平面上で考える。

2 つの複素数

$$\alpha=a+ib, \quad \beta=c+id$$

の和は

$$\alpha+\beta=(a+c)+i(b+d)$$

であり、差は

$$(\alpha-\beta)+\beta=\alpha$$

である。そこで、座標平面上に 4 点 A(α), B(β), C($\alpha+\beta$), $D(\alpha-\beta)$ をとると、次のことがいえる：

点 C($\alpha+\beta$) は、原点 O を点 B(β) に移す平行移動によって点 A(α) が移る点である。

点 $D(\alpha-\beta)$ は、点 B(β) を原点 O に移す平行移動によって点 A(α) が移る点である。

実数 k と複素数 $\alpha=a+ib$ について、$k\alpha=ka+ikb$ である。よって、$\alpha\neq 0$ のとき、点 $k\alpha$ は 2 点 0、α を通る直線 l 上にある。逆に、この直線 l 上の点は、α の実数倍の複素数を表す。

よって、$\alpha\neq 0$ のとき、次のことが成り立つ：

「3 点 $0,\ \alpha,\ \beta$ が一直線上にある」$\Longleftrightarrow$「$\beta=k\alpha$ となる実数 k がある」.

複素数 α、β について、次のことが成り立つ：

共役複素数の性質

$$\overline{\alpha\pm\beta}=\bar{\alpha}\pm\bar{\beta},$$
$$\overline{\alpha\beta}=\bar{\alpha}\bar{\beta},$$
$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}.$$

以上から、n を自然数をするとき、$\bar{\alpha^n}=(\bar{\alpha})^n$ が成り立つことも理解できる。

1.2　複素数の極形式

複素平面上で、0 でない複素数 $z = a + ib$ を表す点を P とする。線分 OP の長さを r、変直線 OP を動径とする考えて動径 OP の表す角を θ とすると、

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$
$$a = r\cos\theta,\ b = r\sin\theta$$

である。よって、0 でない複素数 z は次の形にも表される：

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

ただし、$r > 0$ で、θ は弧度法で表された一般角である。

これを複素数 z の**極形式**という。$r = |z|$ である。また、角 θ を z の**偏角**といい、$\arg z$ で表す[6]。偏角 θ は、$0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲や $-\pi \leq \theta \leq \pi$ の範囲でただ 1 通りに定まる。

z の偏角の 1 つを θ_0 とすると、一般には、整数 n を用いて

$$\arg z = \theta_0 + (2\pi)n$$

である。

$\alpha = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\ \beta = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ のとき、一般に次のことがいえる：

$$\alpha\beta = r_1 r_2\bigl\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\bigr\},$$
$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r_1}{r_2}\bigl\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\bigr\}.$$

以上のことから、複素数の積と商については、次のことが成り立つ：

複素数の積と商の絶対値と偏角

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|,$$
$$\arg\alpha\beta = \arg\alpha + \arg\beta,$$
$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|},$$
$$\arg\frac{\alpha}{\beta} = \arg\alpha - \arg\beta,$$

ただし、偏角についての等式では、2π の整数倍の違いは無視して考える。

また、複素数 z と自然数 n に対して、$|z^n| = |z|^n$ が成り立つ。

6）　arg は「偏角」を意味する英語 argument を略したものである。

絶対値が 1 である複素数 $\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$ と複素数 z との積 αz について、その絶対値と偏角は、次のようになる：

$$|\alpha z| = |\alpha||z|,$$
$$\arg \alpha z = \arg \alpha \arg z = \arg z + \theta.$$

このことから、次のことがいえる：

$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$ と z に対して、点 αz は、点 z を原点を中心として θ だけ回転した点である。

2　演習問題

1. $\alpha = 3 + i$、$\beta = x - 3i$、$\gamma = 2 + iy$ とする。4 点 0、α、β、γ が一直線上にあるとき、実数 x、y の値を求めよ。

2. $\alpha = 1 - i$、$\beta = 2 + 3i$ であるとき、複素数 $3\alpha + 2\beta$ を表す点を図示せよ。

3. 複素数 $3 - 2i$ を表す点と実軸、原点、虚軸に関して対称な点を表す複素数を、それぞれ求めよ。

4. 次の複素数の絶対値を求めよ。

(1) $3 + 4i$

(2) $\dfrac{1 + 3i}{2 - i}$

5. 2 点 $\alpha = 2 + 3i$、$\beta = 1 - 2i$ 間の距離を求めよ。

6. 次の複素数を極形式で表せ。ただし、偏角 θ の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

(1) $3 + \sqrt{3}i$

(2) $3i$

7. 2 つの複素数 $\alpha = 2 + 2\sqrt{3}i$、$\beta = 1 + i$ について、$\alpha\beta$、$\dfrac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし、偏角 θ の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

8. $\alpha = 1 + 2\sqrt{2}i$、$\beta = 4 - 3i$ のとき、次の値を求めよ。

(1) $|\alpha\beta^2|$

(2) $\left|\dfrac{\beta^2}{\alpha^3}\right|$

9. 点 $z = \sqrt{3} + i$ を原点の周りに $\dfrac{\pi}{4}$ 回転した点を表す複素数を求めよ。