古谷数学教室第 22 回

複素数平面

2024 年 10 月 6 日

1　基礎事項

1.1　ド・モアブルの定理

n が自然数のとき、$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ である。0 でない複素数に対して、$z^0 = 1$、$z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$ と定めると、整数 n に対して、次の**ド・モアブルの定理**が成り立つ：

ド・モアブルの定理

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

複素数 α と正の整数 n に対して、方程式 $z^n = \alpha$ の解を、α の n 乗根という。0 でない複素数の n 乗根は、n 個あることが知られている。

一般に、1 の n 乗根は、次の式から得られる n 個の複素数である：

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,\ z_k = \cos\frac{2\pi\cdot k}{n} + i\sin\frac{2\pi\cdot k}{n}.$$

1.2　複素数と図形

2 点 $\mathrm{A}(\alpha)$、$\mathrm{B}(\beta)$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点を $\mathrm{C}(\gamma)$、$m:n$ に外分する点を $\mathrm{D}(\delta)$ とすると、（当然）

$$\gamma = \frac{n\alpha + m\beta}{m+n},$$
$$\delta = \frac{-n\alpha + m\beta}{m-n}$$

が成り立つ。

点 $\mathrm{A}(\alpha)$ を中心とする半径 r の円上の点を $\mathrm{P}(z)$ とする。このとき、

$$\mathrm{AP} = r$$

であるから、方程式

$$|z-\alpha| = r$$

を満たす点 z 全体は、点 A を中心とする半径 r の円である。

2 点 $\mathrm{A}(\alpha)$、$\mathrm{B}(\beta)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線上の点を $\mathrm{P}(z)$ とする。このとき、

$$\mathrm{AP} = \mathrm{BP}$$

であるから、方程式

$$|z-\alpha| = |z-\beta|$$

を満たす点 z 全体は、線分 AB の垂直二等分線である。

原点 O と 2 点 $\mathrm{A}(\alpha)$、$\mathrm{B}(\beta)$ について、$\beta = w\alpha$ を満たす複素数 w の偏角が θ であるとする。$w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$ より、$\beta = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)\alpha$ であるから、点 B は、点 A を原点を中心として $\arg w = \theta$ だけ回転し、さらに原点からの距離を $|w|$ 倍した点である。

3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$、$\mathrm{B}(\beta)$、$\mathrm{C}(\gamma)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ について、2 辺の比 $\mathrm{AC} : \mathrm{AB}$ および $\angle\mathrm{BAC}$ の大きさを調べる。点 A を原点 O に移す平行移動によって、点 B、C はそれぞれ点 $\mathrm{B}'(\beta-\alpha)$、$\mathrm{C}'(\gamma-\alpha)$ に移る。このとき、$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{OB}'\mathrm{C}'$ は合同であるから、

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{OC}'}{\mathrm{OB}'}, \quad \angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{B}'\mathrm{OC}'$$

である。よって、$\gamma - \alpha = w(\beta - \alpha)$ を満たす複素数 $w = \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ を考えると、$|w| = \dfrac{|\gamma-\alpha|}{|\beta-\alpha|}$、$\arg w$ から、2 辺の比 $\mathrm{OC}' : \mathrm{OB}'$ および $\angle\mathrm{B}'\mathrm{OC}'$ の大きさ、すなわち 2 辺の比 $\mathrm{AC} : \mathrm{AB}$ および $\angle\mathrm{BAC}$ の大きさがわかる。

2　演習問題

1. 次の式を計算せよ。

(1) $\left(\cos\dfrac{5}{12}\pi + i\sin\dfrac{5}{12}\pi\right)^{-3}$

(2) $\left\{2\left(\cos\dfrac{\pi}{12} - i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)\right\}^4$

(3) $(1+i)^7$

(4) $(-\sqrt{3}+i)^{-6}$

2. ド・モアブルの定理を用いて、次の等式を証明せよ：

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta, \quad \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

3. 次の方程式の解を求めよ。

(1) $z^3 = 8i$

(2) $z^2 = -1 - \sqrt{3}i$

4. 2 点 A$(4+2i)$、B$(-1+7i)$ を結ぶ線分 AB に対して、次の点を表す複素数を求めよ。

(1) 3 : 2 に内分する点、2 : 3 に内分する点[1)]

(2) 中点

(3) 3 : 2 に外分する点、2 : 3 に外分する点

5. 次の 3 点 $\alpha = 2+i$、$\beta = 5-i$、$\gamma = -4-4i$ を頂点とする三角形の重心を表す複素数を求めよ。

6. 次の方程式を満たす点 z 全体の集合は、どのような図形か答えよ。

(1) $|z+2-3i| = 1$

(2) $|\bar{z} - i| = 2$

(3) $|z| = |z+4|$

(4) $|z-3+i| = |z+1|$

(5) $|z+1| = 2|z-2|$

(6) $3|z-i| = 2|z-1|$

7. 点 z が、原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき、次の条件を満たす点 w はどのような図形を描くか答えよ。

1) （当たり前だが、）答案にはどっちがどっちを意味するのかわかるように解答すること。

(1) $w = z + i$

(2) $w = \dfrac{iz + 4}{2}$

8. $\alpha = 2 - \sqrt{3}i$、$\beta = 6 + \sqrt{3}i$ とする。点 β を点 α を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

9. 複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(\sqrt{3}+i)$、$\mathrm{B}(6i)$、$\mathrm{C}(3\sqrt{3}+5i)$ について、$\angle\mathrm{BAC}$ の大きさと $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ。

10. 複素数平面上の 3 点 $\alpha = 5 - i$、$\beta = 3 + i$、$\gamma = 2 + 2i$ は一直線上にあることを示せ。

11. $\alpha = 2 + i$、$\beta = 4 + 4i$、$\gamma = -1 + 3i$ を表す複素数平面上の点を、それぞれ A、B、C とする。直線 AB と直線 AC は垂直に交わることを示せ。