

古谷数学教室第 23 回

式と曲線

2024 年 10 月 13 日

1 基礎事項

1.1 放物線

2 次関数のグラフが放物線になることはすでに学んだ。ここでは、放物線を図形的な性質から定義して、その方程式を求める。

平面上で、定点 F からの距離と、 F を通らない定直線 l からの距離が等しい点の軌跡を**放物線**といい、この点 F を放物線の**焦点**、直線 l を放物線の**準線**という。

$p \neq 0$ に対し、点 $F(p, 0)$ を焦点とし、直線 $x = -p$ を準線とする放物線の方程式を求める。この放物線上の点を $P(x, y)$ とし、 P から l に下ろした垂線を PH とすると、 $PF = PH$ すなわち $PF^2 = PH^2$ を満たす。よって、方程式

$$y^2 = 4px \quad (1)$$

を得る。逆に、(1) 式を満たす点 $P(x, y)$ は $PF = PH$ を満たす。

(1) 式を放物線の方程式の**標準形**という。また、放物線の焦点を通り、準線に垂直な直線を、放物線の**軸**といい、軸と放物線の交点を、放物線の**頂点**という。放物線は、その軸に関して対称である。

放物線の標準形

焦点は点 $P(p, 0)$ 、準線は直線 $x = -p$ 、軸は x 軸、頂点は原点 O 、曲線は x 軸に関して対称。

1.2 楕円

平面上で、2 定点 F, F' からの距離の和が一定である点の軌跡を**楕円**といい、この 2 点 F, F' を楕円の**焦点**という。

$a > c > 0$ に対し、2 点 $F(c, 0), F'(-c, 0)$ を焦点とし、この 2 点からの距離の和が $2a$ である楕円の方程式を求める。この楕円上の点を $P(x, y)$ とすると、 $PF + PF' = 2a$ より、

$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ となり、両辺 2 乗して整理すると $a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$ を得る。再び両辺 2 乗して整理すると $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$ を得る。 $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ とおくと、 $a > b > 0$ であり、 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ すなわち

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

を得る。逆に、(2) 式を満たす点 $P(x, y)$ は $PF + PF' = 2a$ を満たす。(2) 式を楕円の方程式の標準形という。

(2) 式と x 軸および y 軸の交点 $A(a, 0)$ 、 $A'(-a, 0)$ 、 $B(0, b)$ 、 $B'(0, -b)$ を楕円 (2) の頂点という。頂点を結ぶ線分 AA' 、 BB' のうち、長い方を長軸、短い方の BB' を短軸という。焦点は、長軸上にある。また、長軸と短軸の交点 O を、楕円の中心という。

楕円 (2) は、長軸、短軸に関して対称であり、中心に対しても対称である。

楕円の標準形

焦点は 2 点 $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ 、 $(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ 、楕円上の点から 2 つの焦点までの距離の和は $2a$ 、長軸の長さは $2a$ 、短軸の長さは $2b$ 、曲線は x 軸、 y 軸、原点 O に関して対称。

一般に、楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ は、円 $x^2 + y^2 = a^2$ を、 x 軸をもとにして、 y 軸方向に $\frac{b}{a}$ 倍して得られる曲線である。

1.3 双曲線

平面上で、2 定点 F 、 F' からの距離の差が 0 でなく一定である点の軌跡を双曲線といい、この 2 点 F 、 F' を双曲線の焦点という。

$c > a > 0$ に対し、2 点 $F(c, 0)$ 、 $F'(-c, 0)$ を焦点とし、この 2 点からの距離の差が $2a$ である双曲線の方程式を求める。この双曲線上の点を $P(x, y)$ とすると、 P が双曲線上にあるのは $PF - PF' = \pm 2a$ のときであるから、楕円のときと同様の計算により、

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

を得る。ただし、 $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ とした。逆に、(3) を満たす点 $P(x, y)$ は $PF - PF' = \pm 2a$ を満たす。(3) 式を双曲線の標準形という。

双曲線 (3) は、次の 2 直線が漸近線である：

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

双曲線の焦点 F 、 F' を通る直線と双曲線の交点を、双曲線の頂点という。また、線分 FF' の中点を、双曲線の中心という。

双曲線 (3) について、頂点は 2 点 $(a, 0)$ 、 $(-a, 0)$ で、中心は原点 O である。また、この双曲線は、 x 軸、 y 軸、原点 O に関して対称である。

双曲線の標準形

焦点は2点 $(\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ 、 $(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ 、双曲線上の点から2つの焦点までの距離の差は $2a$ 、漸近線は2直線 $y = \frac{b}{a}x$ 、 $y = -\frac{b}{a}x$ 、曲線は x 軸、 y 軸、原点 O に関して対称。

1.4 2 曲線の平行移動

x 、 y の方程式 $F(x, y) = 0$ を満たす点 (x, y) の全体が曲線を表すとき、この曲線を方程式 $F(x, y) = 0$ の表す曲線、または曲線 $F(x, y) = 0$ という。また、方程式 $F(x, y) = 0$ を、この曲線の方程式という。

次のことがいえる：

曲線の平行移動

曲線 $F(x, y) = 0$ を、 x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動すると、移動後の曲線の方程式は $F(x - p, y - q) = 0$ となる。

2 演習問題

1. 次の放物線の焦点と準線を求めよ。また、その放物線の概形をかけ。

(1) $y^2 = -6x$

(2) $y = 3x^2$

2. 次のような放物線の方程式を求めよ。

(1) 焦点が点 $(6, 0)$ 、準線が直線 $x = -6$

(2) 頂点が原点で、焦点が y 軸上にあり、点 $(3, -3)$ を通る

3. 次の楕円の長軸の長さ、短軸の長さ、および焦点を求めよ。また、その楕円の概形をかけ。

(1) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

(2) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

(3) $16x^2 + 25y^2 = 400$

4. 中心が原点、長軸が x 軸上にあり、次の条件を満たす楕円の方程式を求めよ。

(1) 長軸の長さが 6、短軸の長さが 4

(2) 2 点 $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ 、 $\left(\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right)$ を通る

(3) 2 点 $(\sqrt{7}, 0)$ 、 $(-\sqrt{7}, 0)$ を焦点とし、短軸の長さが 6

5. 円 $x^2 + y^2 = 25$ を x 軸をもとにして y 軸方向に $\frac{4}{5}$ 倍した曲線の方程式を求めよ。

6. 次の双曲線の頂点、焦点、および漸近線を求めよ。また、概形をかけ。

(1) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$

(2) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = -1$

(3) $9x^2 - 16y^2 = 144$

7. 次のような双曲線の方程式を求めよ。

(1) 焦点が $(0, 3)$ 、 $(0, -3)$ で、点 $(4, 5)$ を通る

(2) 漸近線が 2 直線 $y = 2x$ 、 $y = -2x$ で、点 $(3, 0)$ を通る

(3) 頂点が $(0, 4)$ 、 $(0, -4)$ である直角双曲線¹⁾

8. 曲線 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ を、 x 軸方向に 2、 y 軸方向に -3 だけ平行移動して得られる曲線の方程式を求めよ。また、その焦点を求めよ。

9. 次の方程式はどのような図形を表すか答えよ。また、その概形をかけ。さらに、放物線なら頂点と焦点、楕円なら中心と焦点、双曲線なら焦点と漸近線を求めよ。

(1) $y^2 + 4y - 4x + 12 = 0$

1) 2つの漸近線が垂直に交わる双曲線を意味する。

$$(2) \quad 9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y + 4 = 0$$