古谷数学教室第 24 回

式と曲線

2024 年 10 月 27 日

1　基礎事項

1.1　2 次曲線と直線の共有点

2 次曲線と直線の共有点の個数は、2 次曲線の方程式と直線の方程式から 1 文字を消去して得られる 2 次方程式の実数解の個数と一致する。楕円と直線が共有点をただ 1 つもつとき、楕円と直線は**接する**といい、その直線を楕円の**接線**、共有点を**接点**という。

1.2　曲線の媒介変数表示

一般に、曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標が、変数 t によって

$$x = f(t), \quad y = g(t) \tag{1}$$

の形に表されるとき、これを曲線 C の**媒介変数表示**といい、変数 t を**媒介変数**または**パラメータ**という。式 (1) から t を消去して x、y の方程式 $F(x,\ y) = 0$ が得られるとき、これは曲線 C を表す方程式である。

原点 O を中心とする半径 $r\ \ (r > 0)$ の円は、次の方程式で表される：

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{2}$$

この円上に点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ をとり、動径 OP の表す一般角を θ とすると、

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

が成り立つ。これは、円 (2) の媒介変数表示である。ただし、角は弧度法で表すことにする。

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ は、円 $x^2 + y^2 = a^2$ を、x 軸をもとにして y 軸方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍した曲線である。よって、この楕円は、たとえば次のように媒介変数表示される：

$$x = a\cos\theta, \quad y = b\sin\theta.$$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ は、たとえば次のように媒介変数表示される：

$$x = \frac{a}{\cos\theta},\quad y = b\tan\theta.$$

円が定直線上をすべることなく回転していくとき、円上の定点 P が描く曲線を**サイクロイド**という。

円の半径を a、定直線を x 軸、点 P の最初の位置を原点 O、点 P の座標を $(x,\ y)$、円の中心を C、x 軸との接点を T とする。このとき、$\mathrm{OT} = a\theta$ であるから、

$$x = a\theta - a\sin\theta,$$
$$y = a - a\cos\theta$$

と表される。結果の式は、$\sin\theta < 0$ や $\cos\theta < 0$ のときも成り立つ。よって、サイクロイドの媒介変数表示は、次のようになる：

$$x = a(\theta - \sin\theta),\quad y = a(1 - \cos\theta).$$

1.3　極座標と極方程式

平面上に点 O と半直線 OX を定めると、この平面上の点 P の位置は、OP の長さ r と OX から OP へ測った角 θ の大きさで決まる。ただし、θ は弧度法で表された一般角である。このとき、2 つの数の組 $(r,\ \theta)$ を、点 P の**極座標**という。極座標が $(r,\ \theta)$ である点 P を $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ と書くことがある。また、点 O を**極**[1]、半直線 OX を**始線**、θ を**偏角**という。極 O と異なる点 P の偏角 θ は、$0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲ではただ 1 通りに定まる。

極座標に対して、これまで用いてきた x 座標と y 座標の組 $(x,\ y)$ で表した座標を**直交座標**という。

点 P の直交座標を $(x,\ y)$、極座標を $(r,\ \theta)$ とすると、次の関係が成り立つ:

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

平面上の曲線が、極座標 $(r,\ \theta)$ の方程式 $F(r,\ \theta) = 0$ や $r = f(\theta)$ で表されるとき、その方程式をこの曲線の**極方程式**という。

たとえば、極 O を中心とする半径 2 の円の極方程式は

$$r = 2,\ \forall\theta$$

と表される。$\forall\theta$ は略されることが多い。

1) 極 O の極座標は $(0,\ \theta)$ とし、θ は任意の値と考える。この考え方は慣れておいた方がよい。

また、始線 OX 上の点 A$(1,\ 0)$ を通り、始線に垂直な直線は $\mathbb{Z} \in n,\ \theta \neq (\pi/2) \cdot n$ に対し、

$$r = \frac{1}{\cos\theta}$$

である。ただし、$r\ <\ 0$ のときの $(r,\ \theta)$ は、極座標が $(|r|,\ \theta + \pi)$ である点を表すと考えることにする。

また、極 O を通り、始線 OX と $\dfrac{\pi}{4}$ の角をなす直線の極方程式は

$$\forall r,\ \theta = \frac{\pi}{4},$$

中心 A の極座標が $(a,\ 0)$ である半径 a の円の極方程式は、

$$r = 2a\cos\theta$$

である。

2　演習問題

1. 次の曲線と直線の共有点の座標を求めよ。

(1) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1,\quad 2x - 3y = 0$

(2) $y^2 = 6x,\quad 2y - x = 6$

2. 次の直線と 2 次曲線が [ ] 内の条件を満たすように、定数 a、m、b の値、またはその値の範囲を定めよ。(2) においては、その接点の座標を求めよ。

(1) $y = 2x + a,\quad x^2 - y^2 = 1$　　[異なる 2 点で交わる]

(2) $y = mx + 3,\quad 4x^2 + 9y^2 = 36$　　[接する]

(3) $x + by = 2,\quad y^2 = -8x$　　[共有点をもたない]

3. 直線 $x + y = 1$ と曲線 $x^2 + 4y^2 = 4$ の 2 つの交点を結んだ線分の長さと中点の座標を求めよ。

4. 点 $(0,\ 2)$ から楕円 $x^2 + 4y^2 = 4$ に引いた接線の方程式を求めよ。

5. 傾きが 2 で放物線 $y^2 = 4x$ に接する直線の方程式を求めよ。

6. 次の式で表される点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は、どのような曲線を描くか答えよ。

(1) $x = t - 1,\quad y = t^2 + 2$

(2) $x = \sqrt{1 - t^2},\quad y = t^2 + 1$

7. 放物線 $y = -x^2 + 2tx + (t-1)^2$ の頂点は、t の値が変化するとき、どのような曲線を描くか答えよ。

8. 次の曲線を、角 θ を媒介変数として表せ。

(1) $x^2 + y^2 = 9$

(2) $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$

(3) $\dfrac{(x-1)^2}{16} + \dfrac{(y+2)^2}{9} = 1$

9. 次の媒介変数表示は、どのような曲線を表すか答えよ。

(1) $x = 3\cos\theta,\ y = \sin\theta$

(2) $x = \dfrac{1}{\cos\theta} - 2,\quad y = 2\tan\theta + 3$

10. 極座標で表された点 $(2,\ 5\pi/3)$ の位置を図示せよ。

11. 極座標が点 $(4,\ -2\pi/3)$ の直交座標を求めよ。

12. 直交座標の点 $(-2,\ -2\sqrt{3})$ の極座標 $(r,\ \theta)$ を求めよ。ただし、$0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

13. 次の極方程式で表される曲線を図示せよ。

(1) $r = 8\cos\theta$

(2) $r\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) = 3$

(3) $r\sin\theta = 3$

14. 極座標に関して、中心が極 O、半径が a である円上の点 $\left(a,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$ における接線の極方程式を求めよ。

15. 極方程式 $r = 2\cos\theta$ の表す曲線を、直交座標に関する方程式で表せ。

16. 次の曲線を極方程式で表せ。

(1) $x + y - 4 = 0$

(2) $x^2 + y^2 = 4x$

(3) $y^2 = -4x$